

第五讲 自然数列趣题

本讲的习题，大都是关于自然数列方面的计数问题，解题的思维方法一般是运用枚举法及分类统计方法，望同学们能很好地掌握它。

例 1 小明从 1 写到 100，他共写了多少个数字“1”？

解：分类计算：

“1”出现在个位上的数有：

1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 共 10 个；

“1”出现在十位上的数有：

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 共 10 个；

“1”出现在百位上的数有：100 共 1 个；

共计 $10+10+1=21$ 个。

例 2 一本小人书共 100 页，排版时一个铅字只能排一位数字，请你算一下，排这本书的页码共用了多少个铅字？

解：分类计算：

从第 1 页到第 9 页，共 9 页，每页用 1 个铅字，共用 $1 \times 9 = 9$ （个）；

从第 10 页到第 99 页，共 90 页，每页用 2 个铅字，共用 $2 \times 90 = 180$ （个）；

第 100 页，只 1 页共用 3 个铅字，所以排 100 页书的页码共用铅字的总数是：

$9+180+3=192$ （个）。

例3 把1到100的一百个自然数全部写出来，用到的所有数字的和是多少？

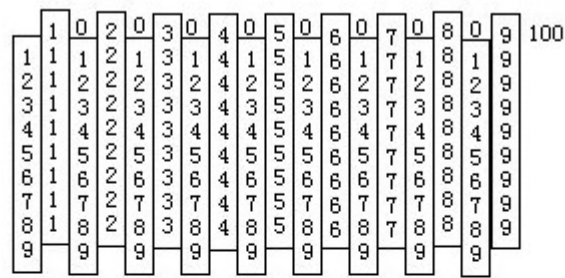


图5-1

解：（见图5—1）先按题要求，把1到100的一百个自然数全部写出来，再分类进行计算：

如图5—1所示，宽竖条带中都是个位数字，共有10条，数字之和是：

$$\begin{aligned}
 & (1+2+3+4+5+6+7+8+9) \times 10 \\
 &= 45 \times 10 \\
 &= 450.
 \end{aligned}$$

解：（见图 5—1）先按题要求，把 1 到 100 的一百个自然数全部写出来，再分类进行计算：

如图 5—1 所示，宽竖条带中都是个位数字，共有 10 条，数字之和是：

$$\begin{aligned}
 & (1+2+3+4+5+6+7+8+9) \times 10 \\
 &= 45 \times 10 \\
 &= 450.
 \end{aligned}$$

窄竖条带中，每条都包含有一种十位数字，共有 9 条，数字之和是：

$$\begin{aligned}
 & 1 \times 10 + 2 \times 10 + 3 \times 10 + 4 \times 10 + 5 \times 10 + 6 \times 10 + 7 \times 10 \\
 & + 8 \times 10 + 9 \times 10
 \end{aligned}$$

$$= (1+2+3+4+5+6+7+8+9) \times 10$$

$$= 45 \times 10$$

$$= 450.$$

另外 100 这个数的数字和是 $1+0+0=1$.

所以，这一百个自然数的数字总和是：

$$450+450+1=901.$$

顺便提请同学们注意的是：一道数学题的解法往往不只一种，谁能寻找并发现出更简洁的解法来，往往标志着谁有更强的数学能力. 比如说这道题就还有更简洁的解法，试试看，你能不能找出来？