2016 年第 27 届亚太小学奥林匹克

（上海赛区初赛）

五年级 A 卷

90 分钟
（总分：150 分）
2015 年12 月21 日
下午$18:30-20:00$

（注意事项）
1 尽量解答所有问题。
2 不准使用数学用表或计算器。
3 答案请另填写在所提供的第一回合的作答卷上。
4 只有正确答案才能得分。

【第 1 题】
计算：$91.5+19.8+80.2=$________ 。
【分析与解】
计算，加法结合律。

$$91.5+19.8+80.2=91.5+(19.8+80.2)=91.5+100=191.5$$

【第 2 题】

计算：若 $A*B$ 表示 $(A+3B)\times(A+B)$，那么 $8*9=$________ 。

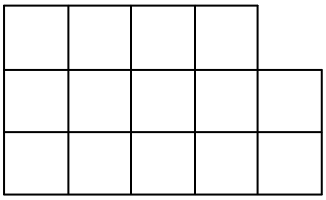
【分析与解】
定义新运算。

$$8*9=(8+3\times9)\times(8+9)=595$$

【第 3 题】
某班学生手中分别拿红、黄两种颜色的小旗，已知手中有红旗的共有 34 人，手中有黄旗的共有 26 人，手中有红、黄两种小旗的有 9 人，那么这个班共有 ________ 人。（每个学生手上都拿着小旗）
【分析与解】
容斥原理。
由容斥原理，这个班共有 $34+26-9=51$ 人。

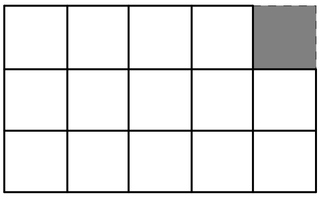
【第 4 题】

如图，每个小方格都是边长为1的正方形，图中共有 ________ 个不同的正方形。



【分析与解】

图形计数。



将原图右上角补一个小方格，使之变成5×3的方格网。

1×1的小方格有$5\times3=15$个;

2×2的小方格有$4\times2=8$个;

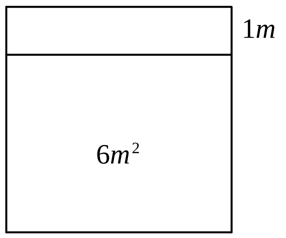
3×3的小方格有$3\times1=3$个;

其中包含右上角阴影小方格有3个（1×1的小方格、2×2的小方格、3×3的小方格各1个);

故原图中共有$(15+8+3)-3=23$个不同的正方形。

【第 5 题】

从一个正方形的木板上锯下宽$1m$的一个长方形木条后，剩下的长方形面积为$6m^2$，那么锯下的长方形木条面积是 ________ 平方米。



【分析与解】

几何，面积。

设原来正方形的边长为 x 米（ $x>1$)；

则剩下的长方形的长为 x 米、宽为 $\left(x-1\right)$ 米；

故 $x\left(x-1\right)=6$；

经尝试，当 $x=3$ 时，方程成立；

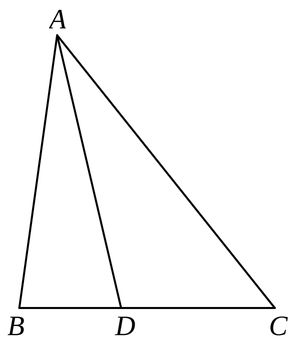
当 $x>1$ 时， x 越大， $x\left(x-1\right)$ 越大；

故 $x=6$ 是方程的唯一正整数解。

锯下的长方形木条面积是 $3\times1=3$ 平方米。

【第 6 题】

如图，已知 $BD:DC=2:3$， $S_{\triangle ABC}=35$，那么三角形 ABD 的面积是 ________ 。



【分析与解】

几何，等积变形。

因为 $BD:DC=2:3$；

所以 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=2:3$；

因为 $S_{\triangle ABC}=35$；

所以 $S_{\triangle ABD}=35\times\dfrac{2}{2+5}=14$。

【第 7 题】
有一块匀速胜场的草场，可供12头牛吃25天，或可供24头牛吃10天，那么它可供 ________ 头牛吃20天。
【分析与解】
牛吃草。
设1头牛1天吃1份;
12头牛25天吃$12\times 25=300$份;
24头牛10天吃$24\times 10=240$份;
草每天生长$\left(300-240\right)\div\left(25-10\right)=4$份;

草场原有草量为$\left(12-4\right)\times 25=200$或$\left(24-4\right)\times 10=200$份;

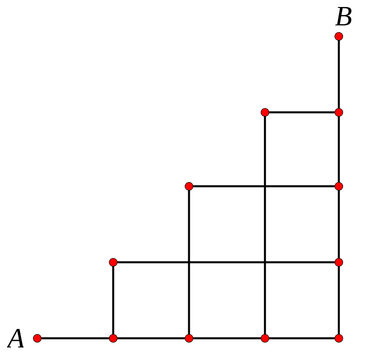
这片草场可供$200\div 20+4=14$头牛吃20天。

【第 8 题】
$\overline{2015a1221}$能被9整除，那么a是 ________ 。
【分析与解】
数论，整除。
一个自然数能被9整除，那么其各个数位上的数字之和能被9整除。
因为$\overline{2015a1221}$能被9整除;
所以$2+0+1+5+a+1+2+2+1=14+a$能被9整除;
所以$14+a=18$;
所以$a=4$。

【第 9 题】
由数字1，2，3可以组成 ________ 个没有重复数字的数。
【分析与解】
计数，乘法原理，加法原理。
一位数有3个：1、2、3;
两位数有$3\times 2=6$个：12、13、21、23、31、32;
三位数有$3\times 2\times 1=6$个：123、132、213、231、312、321;
由数字1，2，3可以组成$3+6+6=15$个没有重复数字的数。

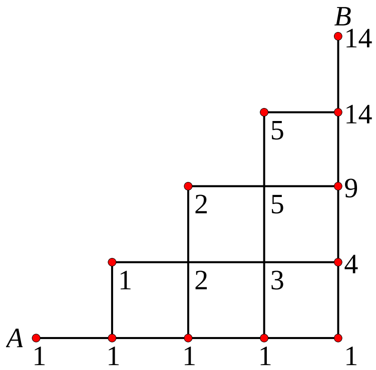
【第 10 题】

如图，从 A 走到 B，只能向上或向右沿着线段走，有________条不同的路线。



【分析与解】

计数，标数法。

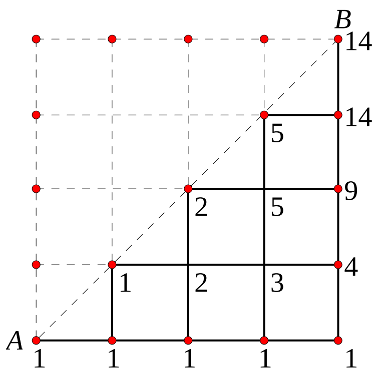


如图所示，由标数法可得从 A 走到 B，只能向上或向右沿着线段走，有14条不同的路线。

【背景】

卡特兰数又称卡塔兰数，英文名 *Catalan number*，是组合数学中一个常出现在各种计数问题中出现的数列。以比利时的数学家欧仁·查理·卡塔兰（1814~1894）的名字来命名，其前几项为1，1，2，5，14，42，……

如图，在 $n\times n$ 的方格网中，从左下角 A 走到右上角 B，只能向上或向右沿着线段走，且任何时刻向上走的步数不超过向右走的步数（也可以理解为从不穿越对角线 AB），其结果为卡塔兰数。



【第 11 题】

十进制$(23)_{10}$在六进制中表示为$(35)_6$，$(230)_6+(255)_6=(\_\_\_\_\_\_\_\_)_{10}$。

【分析与解】
数论，进制与位值。
（方法一）

$(230)_6=\left(2\times6^2+3\times6^1+0\times6^0\right)_{10}=(2\times36+3\times6+0\times1)_{10}=(90)_{10}$；

$(255)_6=\left(2\times6^2+5\times6^1+5\times6^0\right)_{10}=(2\times36+5\times6+5\times1)_{10}=(107)_{10}$；

$(90)_{10}+(107)_{10}=(197)_{10}$；

故$(230)_6+(255)_6=(197)_{10}$。

（方法二）

$(230)_6+(255)_6=(525)_6$；

$(525)_6=\left(5\times6^2+2\times6^1+5\times6^0\right)_{10}=(5\times36+2\times6+5\times1)_{10}=(197)_{10}$；

故$(230)_6+(255)_6=(197)_{10}$。

【第 12 题】
用加减乘除四则运算及添括号将6、6、6、10四个数列式计算得到24。
（每个数都要用一次且只能用一次）
____。
【分析与解】
计算，算24点。
$6\times10-6\times6=24$

【第 13 题】
一批木料，先用去总数的$\frac{2}{7}$，又用去剩下的$\frac{3}{5}$，这时剩下12立方米。这批木料共有________立方米。
【分析与解】
还原问题。
这批木料共有$12\div\left(1-\frac{3}{5}\right)\div\left(1-\frac{2}{7}\right)=42$立方米。

【第 14 题】
甲、乙二人以均匀的速度分别从 A 、B 两地同时出发，相向而行，他们第一次相遇地点离 A 地 7 千米，相遇后二人继续前进，走到对方出发点后立即返回，在距 B 地 3 千米处第二次相遇，那么 A 、B 两地之间的距离是 ________ 千米。
【分析与解】
行程问题，两次相遇。
甲、乙二人从出发到第一次迎面相遇共走了 1 个 AB 全程;
甲、乙二人从出发到第二次迎面相遇共走了 3 个 AB 全程;
甲、乙二人从出发到第二次迎面相遇用时是从出发到第一次迎面相遇用时的 $3\div1=3$ 倍;
甲从出发到第一次迎面相遇走了 7 千米;
甲从出发到第二次迎面相遇走了 $7\times3=21$ 千米;
这 21 千米相当于 1 个 AB 全程再加 3 千米;
A 、B 两地之间的距离是 $21-3=18$ 千米。

【第 15 题】
4 男 2 女 6 个人站成一排合影留念，有 ________ 种不同的排法。
【分析与解】
计数，排列。
6 个人站成一排合影留念，有 $P_6^6=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$ 种不同的排法。

【第 16 题】
有一个布袋中有 5 种不同颜色的球，每种都有 20 个，那么一次至少要取出 ________ 个小球，才能保证其中至少有 3 个小球的颜色相同。
【分析与解】
抽屉原理和最不利原则。
根据最不利原则，先每种颜色各取 2 个，再取 1 个，即能保证其中至少有 3 个小球的颜色相同。
故一次至少要取出 $2\times5+1=11$ 个小球，才能保证其中至少有 3 个小球的颜色相同。

【第 17 题】
1949 年 10 月 1 日，中华人民共和国正式成立了，这是一个伟大的日子，象征着中国人民重新站了起来。那么 1949^{1001} 的末两位数字是 ________ 。
【分析与解】
数论，余数与周期。
$1949^1\equiv49\pmod{100}$ 、$1949^2\equiv1\pmod{100}$;
故 1949^n 的末两位以“49， 01”为周期;
$1001\div2=500\cdots\cdots1$;
故 $1949^{1001}\equiv1949^1\equiv49\pmod{100}$;
即 1949^{1001} 的末两位数字是 49 。

【第 18 题】

如果六位数 2016□□ 能被3、7、11整除，那么它的最后两位数是 ________ 。

【分析与解】

数论，整除。

一个数能被3、7、11整除，则这个数能被$\left[3,7,11\right]=231$整除;

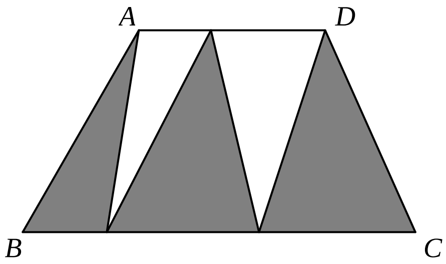
$201699\div 231=873\cdots\cdots 36$;

故$201699-36=201663$能被231整除;

故如果六位数$\overline{2016\square\square}$能被3、7、11整除，那么它的最后两位数是63。

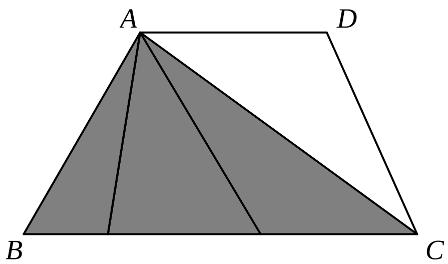
【第 19 题】

如图，梯形 $ABCD$ 面积为30，下底 BC 是上底 AD 的2倍，那么阴影部分的面积是 ________ 个。



【分析与解】

几何，等积变形。



通过等积变形可得$S_{阴影}=S_{\triangle ABC}$，$S_{空白}=S_{\triangle BCD}$;

因为$BC=AD\times 2$，即$BC:AD=2:1$;

所以$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle BCD}=2:1$;

因为$S_{梯形ABCD}=30$;

所以$S_{\triangle ABC}=30\times\dfrac{2}{2+1}=20$;

所以$S_{阴影}=20$。

【第 20 题】

一张数学试卷，只有25道选择题。做对一题得4分，做错一题倒扣1分；如不做，不得分也不扣分，若小明得了78分，那么他做错 ________ 题。

【分析与解】

不定方程（组）。

设小明做对 x 题、做错 y 题，则他不做的有 $\left(25-x-y\right)$ 题；

根据小明得了78分列方程，得 $4x-y+0\times\left(25-x-y\right)=78$；

化简，得 $4x-y=78$；

因为 x 和 y 均为自然数，且 $x+y\leqslant 25$；

所以方程的解为 $\begin{cases}x=20\\y=2\end{cases}$；

故小明做错2题。

【第 21 题】

1，1，2，3，5，8，13，21，34，…从第三个数起，每个数是前两个数的和，那么当这数列的第2015个数被4除所得的余数是 ________ 。

【分析与解】

数论，余数与周期。

根据“和的余数等于余数的和的余数”可得

Fibonacci 数列除以4的余数为1，1，2，3，1，0，1，1，…

以“1，1，2，3，1，0”六个为一周期;

$2015\div 6=335\cdots\cdots 5$；

故这数列的第2015个数被4除所得的余数与第5个数被4除所得的余数相同，为1。

【第 22 题】

这里有5个分数：$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{15}{23}$，$\frac{10}{17}$，$\frac{12}{19}$。如果按大小顺序排列，排在中间的是 ________ 。

【分析与解】

分数的比较大小。

通分母:

$\left[2,5,15,10,12\right]=2^2\times 3\times 5=60$；

$\frac{2}{3}=\frac{60}{90}$，$\frac{5}{8}=\frac{60}{96}$，$\frac{15}{23}=\frac{60}{92}$，$\frac{10}{17}=\frac{60}{102}$，$\frac{12}{19}=\frac{60}{95}$；

因为 $\frac{60}{90}>\frac{60}{92}>\frac{60}{95}>\frac{60}{96}>\frac{60}{102}$；

所以 $\frac{2}{3}>\frac{15}{23}>\frac{12}{19}>\frac{5}{8}>\frac{10}{17}$；

故排在中间的是 $\frac{12}{19}$。

【第 23 题】
甲、乙两队合作挖一条水渠要30天完成。若甲队先挖10天后，再由乙队单独挖40天，也可完成任务。如果这条水渠由乙队单独挖，需要 ________ 天。
【分析与解】
工程问题。
（方法一）
设工程总量为“1”;
甲、乙两队的工作效率和为$1\div 30=\frac{1}{30}$;
“甲队先挖10天后，再由乙队单独挖40天，可以完成任务”相当于“甲、乙两队先合作挖10天，再由乙队单独挖30天，可以完成任务”;
乙的工作效率为$\left(1-\frac{1}{30}\times 10\right)\div 30=\frac{1}{45}$;
如果这条水渠由乙队单独挖，需要$1\div\frac{1}{45}=45$天。
（方法二）
设工程总量为“1”;
设甲的工作效率为x，乙的工作效率为y;
根据题意，得$\begin{cases}30(x+y)=1\\10x+40y=1\end{cases}$;
解得$\begin{cases}x=\frac{1}{90}\\y=\frac{1}{45}\end{cases}$;
如果这条水渠由乙队单独挖，需要$1\div\frac{1}{45}=45$天。

【第 24 题】
一条公路上，有一个骑车人和一个步行人，骑车人速度是步行人速度的3倍，每隔6分钟有一辆公共汽车超过步行人，每隔10分钟有一辆公共汽车超过骑车人，如果公共汽车始发站发车的时间间隔保持不变，那么间隔 ________ 分钟发一辆公共汽车。
【分析与解】
行程问题，发车间隔。
设步行人的速度为x米/分，则骑车人的速度为$3x$米/分;
设公共汽车的速度为y米/分;
$6(y-x)=10(y-3x)$;
化简，得$6x=y$;
所以$x:y=1:6$;
设步行人的速度为1份，则骑车人的速度为3份，公共汽车的速度为6份;
相邻两辆公共汽车之间的距离为$(6-1)\times 6=30$或$(6-3)\times 10=30$份;
故间隔$30\div 6=5$分钟发一辆公共汽车。

【第 25 题】
2016 与正整数 a 的乘积是一个完全平方数，则 a 的最小值是 ________ 。
【分析与解】
数论，完全平方数。
$2016\times a=\square^2$；
2016 分解质因数: $2016=2^3\times3^2\times7$；
而完全平方数分解质因数后，指数均为偶数;
所以 a 最小是 $2\times7=14$。

【第 26 题】
一个数除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 9 余 5，那么满足条件的最小自然数为 ________ 。
【分析与解】
数论，同余。
如果一个除以 9 余 5，则这个数一定满足除以 3 余 2；
故只符合“除以 5 余 3，除以 9 余 5”即可。
一个数除以 9 余 5，可以设这个数为 $9k+5$；
则 $(9k+5)$ 除以 5 余数 3；

$9k+5\equiv4k\equiv3\pmod 5$；

k 最小为 2；
故满足条件的最小自然数为 $9\times2+5=23$。

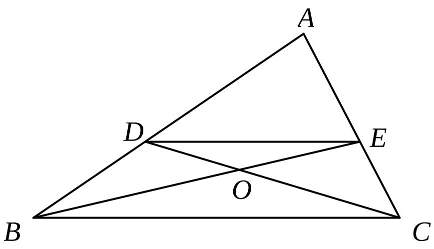
【第 27 题】
一栋10 层楼房备有电梯。在一楼有 3 人进了电梯，则他们到各层的可能情况共有 ________ 种。
【分析与解】
计数，乘法原理。
每个人都有可能去第 2、3、…、10 层，有 9 种可能;
由乘法原理，三人到各层的可能情况共有 $9\times9\times9=729$ 种。

【第 28 题】
有大、小两个正方体水池，它们的棱长分别是 6 米、3 米。把一堆碎石完全沉没在大水池的水里，大水池的水面升高了 3 厘米。如果将这堆碎石完全沉浸在小水池的水里，小水池的水面升高了 ________ 厘米。（注意：原来水池并没有装满，但有足够多的水，并且水从未溢出）
【分析与解】
几何，立体几何。
这堆碎石的体积为 $600\times600\times3=1080000$ 立方厘米;

如果将这堆碎石完全沉浸在小水池的水里，小水池的水面升高了 $1080000\div(300\times300)=12$ 厘米。

【第 29 题】

如图，已知 DE 平行 BC ，$S_{\triangle BOD}=7$，$S_{\triangle DOE}=4$，那么 $S_{\triangle ADE}=$ ________ 。



【分析与解】

几何，梯形蝴蝶模型、沙漏模型和金字塔模型。

根据梯形蝴蝶模型:

因为 $DE // BC$;

所以 $S_{\triangle BOD}=S_{\triangle COE}=7$;

因为 $S_{\triangle BOD}:S_{\triangle DOE}=7:4$;

所以 $BO:EO=7:4$;

所以 $S_{\triangle BOC}:S_{\triangle COE}=7:4$;

所以 $S_{\triangle BOC}=S_{\triangle COE}\times\frac{7}{4}=7\times\frac{7}{4}=\frac{49}{4}$;

所以 $S_{梯形BCDE}=4+7+7+\frac{49}{4}=\frac{121}{4}$;

根据沙漏模型:

因为 $DE // BC$， $BO:EO=7:4$;

所以 $BC:DE=7:4$;

再根据金字塔模型:

所以 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle ADE}=7^2:4^2=49:16$;

所以 $S_{\triangle ADE}:S_{梯形BCDE}=16:(49-16)=16:33$;

所以 $S_{\triangle ADE}=S_{梯形BCDE}\times\frac{16}{33}=\frac{121}{4}\times\frac{16}{33}=\frac{44}{3}=14\frac{2}{3}$。

【第 30 题】

有一些$2n$位数具有如下性质：将其从正中间断开，可以得到两个n位数（当然，第二个数的首位可能为0），这个$2n$位数恰好是两个n位数和的平方。例如：$81=(8+1)^2$，$9801=(98+01)^2$，$494209=(494+209)^2$。那么除了9801外，具有该性质的四位数是________。（写出一个即可）

【分析与解】

设这个是四位数$\overline{abcd}$；

因为$\overline{abcd}=\overline{ab}\times100+\overline{cd}=\overline{ab}\times99+\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)=\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2$；

所以$\overline{ab}\times99=\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)^2-\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)=\left(\overline{ab}+\overline{cd}\right)\left(\overline{ab}+\overline{cd}-1\right)$；

因为$99=3^2\times11=9\times11$，而且$\overline{ab}+\overline{cd}$、$\overline{ab}+\overline{cd}-1$互质；

所以$\overline{ab}+\overline{cd}$、$\overline{ab}+\overline{cd}-1$中必有一个是11的倍数，也必有一个是9的倍数；

由于$100\times(100-1)=9900$，$101\times(101-1)=10100$；

故$\overline{ab}+\overline{cd}\leqslant99$。

(1)当$\overline{ab}+\overline{cd}$是11的倍数时；

$\overline{ab}+\overline{cd}$	$\overline{ab}+\overline{cd}-1$
11	10
22	21
33	32
44	43
55	54
66	65
77	76
88	87
99	98

其中符合条件的是$\begin{cases}\overline{ab}+\overline{cd}=55\\ \overline{ab}+\overline{cd}-1=54\end{cases}$或$\begin{cases}\overline{ab}+\overline{cd}=99\\ \overline{ab}+\overline{cd}-1=98\end{cases}$；

所以$\overline{abcd}=55^2=3025$或$\overline{abcd}=99^2=9801$。

(2)当 $\overline{ab}+\overline{cd}-1$是11的倍数时;

$\overline{ab}+\overline{cd}-1$	$\overline{ab}+\overline{cd}$
11	12
22	23
33	34
44	45
55	56
66	67
77	78
88	89

其中符合条件的是$\begin{cases}\overline{ab}+\overline{cd}=45\\ \overline{ab}+\overline{cd}-1=44\end{cases}$;

所以 $\overline{abcd}=45^2=2025$;

所以 $\overline{abcd}=2025$ 或 3025 或 9801 。

故此题答案为 2025 或 3025 。(写出一个即可)

【背景】

将一个 $2n$ 位数的前 n 位数和后 n 位数各当成一个 n 位数,如果这两个 n 位数之和的平方正好等于这个 $2n$ 位数,则称这个 $2n$ 位数为卡布列克($Kabulek$)怪数。