2016年第27届亚太小学奥林匹克

（上海赛区初赛）

四年级 A 卷

90分钟
（总分：150分）
2015年12月21日
下午 $18:30-20:00$

（注意事项）
1 尽量解答所有问题。
2 不准使用数学用表或计算器。
3 答案请另填写在所提供的第一回合的作答卷上。
4 只有正确答案才能得分。

【第1题】
$47\times25\times8=$________。
【分析与解】
计算，乘法结合律。

$47\times25\times8=47\times25\times\left(4\times2\right)=\left(25\times4\right)\times\left(2\times47\right)=100\times94=9400$

【第2题】

对于任何两个数 a 和 b，定义新预案算“$\oplus$”为：$a\oplus b=a\times b-1$，那么 $\left(5\oplus3\right)\oplus2=$________。

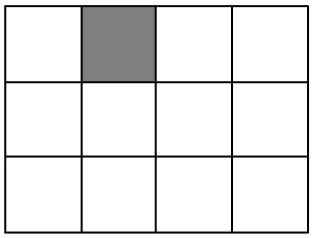
【分析与解】
定义新运算。
$5\oplus3=5\times3-1=14$；

$\left(5\oplus3\right)\oplus2=14\oplus2=14\times2-1=27$。

【第3题】
一队学生站成19行19列的方阵，去掉5行5列，变成一个14行14列的方阵，要减少________学生。
【分析与解】
方阵问题。
要减少 $19\times19-14\times14=361-196=165$ 学生。

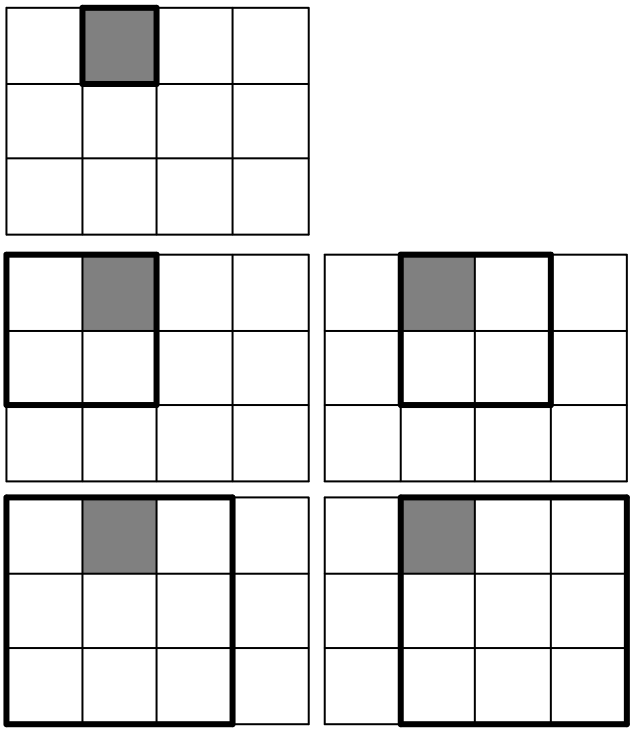
【第 4 题】

如图，每个小方格都是边长为1的正方形，图中有 ________ 个含有阴影小方格的正方形。



【分析与解】

图形计数。



含有阴影的1×1的小方格有1；

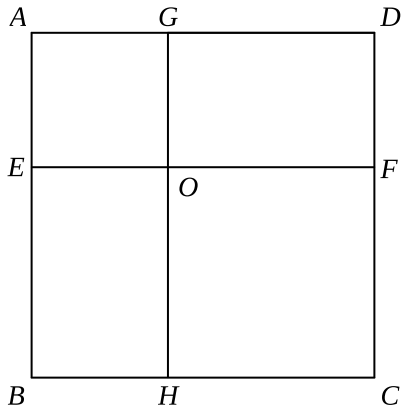
含有阴影的2×2的小方格有2；

含有阴影的3×3的小方格有2；

图中有$1+2+2=5$个含有阴影小方格的正方形。

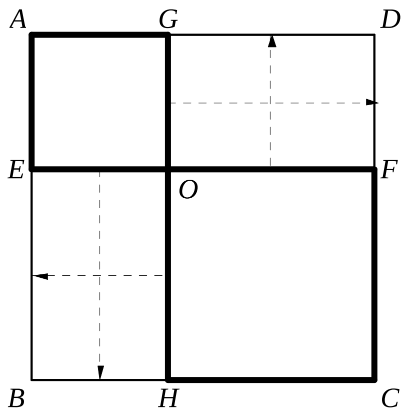
【第 5 题】

如图，正方形 $ABCD$ 的边长是 4 厘米，现在把它分成四个小长方形，长方形 $AEOG$ 与长方形 $FCHO$ 这 2 个小长方形的周长之和 ________ 厘米。



【分析与解】

几何，巧求周长。



由线段平移，可得 $C_{长方形AEOG}+C_{长方形FCHO}=C_{正方形ABCD}=a_{正方形ABCD}\times 4=4\times 4=16$ 厘米。

【第 6 题】

小马虎在做一道加法题时，把一个加数十位上的 6 与个位的 9 看反了，结果和是 174，那么正确的结果应该是 ________ 。

【分析与解】

把一个加数十位上的 6 与个位的 9 看反了;

即相当于把“+69”看成“+96”;

故正确的结果应该是 $174-96+69=147$ 。

【第 7 题】
小明家的小狗喝水时间很规律，每隔 5 分钟喝一次水，第一次喝水的时间是 8 点整，当小狗第 20 次喝水时，时间是 ________ 。
【分析与解】
间隔问题。

第 1 次喝水到第 20 次喝水间隔时间为 $5\times(20-1)=95$ 分钟;

95 分 $=1$ 小时 35 分;
故当小狗第 20 次喝水时，时间是 9 点 35 分。

【第 8 题】
若干名学生参加跳远和游泳比赛，其中跳远比赛获奖的有 16 人，游泳比赛获奖的 20 人，两项比赛都获奖的有 7 人。那么有 ________ 名学生获奖。
【分析与解】
容斥原理。
由容斥原理，有 $16+20-7=29$ 名学生获奖。

【第 9 题】

19^{2015} 表示 2015 个 19 连乘，那么所得的积的末位数字是 ________ 。

【分析与解】
数论，余数与周期。

$19^{1}\equiv 9\pmod{10}$ 、$19^{2}\equiv 1\pmod{10}$:

故 19^{n} 的末位数字以“9 ，1”为周期;
$2015\div 2=1007\cdots\cdots 1$;

故 $19^{2015}\equiv 19^{1}\equiv 9\pmod{10}$;

即 19^{2015} 的末位数字是 9 。

【第 10 题】
$3+5+7+\cdots+2015$ 的结果 ________ 。（填写“奇数”或“偶数”）
【分析与解】
数论，奇偶性。

3 ，5 ，7 ，…， 2015 一共有 $(2015-3)\div 2+1=1007$ 个奇数;

奇数个奇数的和为奇数;
故 $3+5+7+\cdots+2015$ 的结果是奇数。

【第 11 题】

十进制$(23)_{10}$在六进制中表示为$(35)_6$，$(135)_6+(12)_6=(\underline{\qquad\qquad})_{10}$。

【分析与解】
数论，进制与位值。
（方法一）

$(135)_6=\left(1\times6^2+3\times6^1+5\times6^0\right)_{10}=(1\times36+3\times6+5\times1)_{10}=(59)_{10}$；

$(12)_6=\left(1\times6^1+2\times6^0\right)_{10}=(1\times6+2\times1)_{10}=(8)_{10}$；

$(59)_{10}+(8)_{10}=(67)_{10}$；

故$(135)_6+(12)_6=(67)_{10}$。

（方法二）

$(135)_6+(12)_6=(151)_6$；

$(151)_6=\left(1\times6^2+5\times6^1+1\times6^0\right)_{10}=(1\times36+5\times6+1\times1)_{10}=(67)_{10}$；

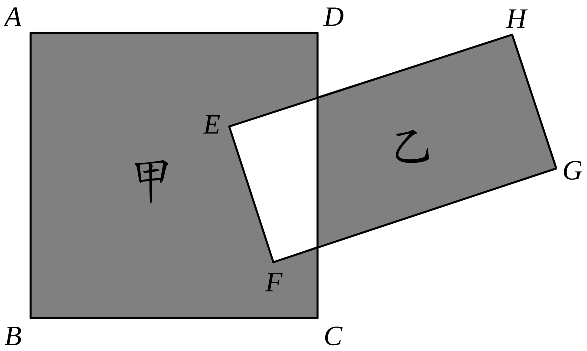
故$(135)_6+(12)_6=(67)_{10}$。

【第 12 题】
用加减乘除四则运算及添括号将1、2、7、7四个数列式计算得到24。
（每个数都要用一次且只能用一次）
____。
【分析与解】
计算，算24点。

$(7\times7-1)\div2=24$

【第 13 题】

如图正方形 $ABCD$ 边长是 12 厘米，长方形 $EFGH$ 的长为 10 厘米，宽为 6 厘米，阴影部分甲与阴影部分乙的面积差是 ________ 平方厘米。



【分析与解】

几何，巧求面积。

根据差不变性质:

$S_{\text{阴影部分甲}}-S_{\text{阴影部分乙}}=S_{\text{正方形}ABCD}-S_{\text{长方形}EFGH}=12^2-10\times6=144-60=84$ 平方厘米。

【第 14 题】

小敏有 140 元，小花有 100 元，小花给小敏 ________ 元，小敏的钱数就是小花的 2 倍多 3 元。

【分析与解】

和倍问题。

（方法一）

小花给小敏钱之后，两人的总钱是不变，为 $140+100=240$ 元;

小花给小敏钱之后，小敏的钱数就是小花的 2 倍多 3 元，小花有 $(240-3)\div(1+2)=79$ 元;

故小花给小敏 $100-79=21$ 元。

（方法二）

设小花给小敏 x 元，小敏的钱数就是小花的 2 倍多 3 元;

则由题意，得 $2(100-x)+3=140+x$;

解得 $x=21$;

故小花给小敏 21 元。

【第 15 题】

六位数$\overline{5179\square 2}$能被11整除，那么这个六位数是 ________ 。

【分析与解】

数论，整除。

如果一个正整数能被11整除，那么这个数奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差能被11整除。

因为$\overline{5179\square 2}$能被11整除;

所以$(1+9+2)-(5+7+\square)=\square$能被$11$整除;

所以$\square=0$;

故这个六位数是517902。

【第 16 题】

小明家养了一些鸡和兔子，同时养在一个笼子里，小明数了数，它们共有35个头，110只脚，那么小明家养了 ________ 只兔子。

【分析与解】

鸡兔同笼。

（方法一）

假设全是鸡，那么有$35\times 2=70$只脚，比实际少$110-70=40$只脚;

每只鸡比每只兔子少$4-2=2$只脚;

故小明家养了$40\div 2=20$只兔子。

（方法二）

假设全是兔，那么有$35\times 4=140$只脚，比实际多$140-110=30$只脚;

每只兔子比每只鸡多$4-2=2$只脚;

故小明家养了$30\div 2=15$只鸡，$35-15=20$只兔子。

（方法三）

设小明家养了x只鸡，y只兔子;

根据题意，得$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=110 \end{cases}$;

解得$\begin{cases} x=15 \\ y=20 \end{cases}$;

故小明家养了20只兔子。

【第 17 题】
小红今年 6 岁，爸爸 36 岁，________ 年后爸爸的年龄是小红的 3 倍。
【分析与解】
年龄问题。
（方法一）
年龄问题，年龄差不变;
爸爸和小红的年龄差为 $36-6=30$ 岁;
当爸爸的年龄是小红的 3 倍时，小红的年龄为 $30\div(3-1)=15$ 岁;
故 $15-6=9$ 年后爸爸的年龄是小红的 3 倍。
（方法二）
设 x 年后爸爸的年龄是小红的 3 倍;
由题意，得 $3(6+x)=36+x$;
解得 $x=9$;
故 9 年后爸爸的年龄是小红的 3 倍。

【第 18 题】
甲、乙两车从相距 770 千米的两地相向而行，甲车每小时行 45 千米，乙车每小时行 41 千米，乙车先出发 2 小时后，甲车才出发。甲车行 ________ 小时后与乙车相遇。
【分析与解】
行程问题，相遇问题。
乙车先出发 2 小时，行驶的路程为 $41\times2=82$ 千米;
故甲车行 $(770-82)\div(45+41)=8$ 小时后与乙车相遇。

【第 19 题】
黑色的绒布袋子中放着四种颜色的小球，其中红球 8 个，白球 9 个，黄球 10 个，蓝球 11 个，至少要取 ________ 个球才能保证有三个球的颜色是一样的。
【分析与解】
抽屉原理，最不利原则。
根据最不利原则，先每种颜色的球各取 2 个，再取 1 个球，才能保证有三个球的颜色是一样的;
故至少要取 $2\times4+1=9$ 个球才能保证有三个球的颜色是一样的。

【第 20 题】
小宝去给小贝买生日礼物，商店里卖的东西中，有不同的玩具 8 种，不同的课外书 20 本，不同的纪念品 10 种。那么，小宝买一种礼物可以有 ________ 种不同的选法。
【分析与解】
计数，加法原理。
小宝买一种礼物可以有 $8+20+10=38$ 种不同的选法。

【第 21 题】

把330个苹果、240个桔子平均分给小朋友，分完后苹果剩下10个，桔子正好分完，那么最多有________个小朋友。

【分析与解】

数论，约数，余数。

330个苹果平均分给小朋友，分完后苹果剩下10个，则小朋友的人数是$330-10=320$的约数;

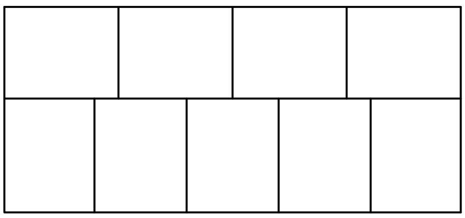
240个桔子平均分给小朋友，桔子正好分完，则小朋友的人数是240的约数;

所以小朋友的人数是$(320,240)=80$的约数;

故最多有80个小朋友。

【第 22 题】

有9个小长方形，它们的长和宽分别相等，用这9个小长方形拼成的大长方形（如图）的周长是290厘米，那么每个小长方形的面积是________平方厘米。



【分析与解】

几何，等量代换。

设小长方形的长为x厘米、宽为y厘米;

则大长方形的长为$4x=5y$厘米，宽为$(x+y)$厘米;

$$\begin{cases}4x=5y\\2\left[4x+(x+y)\right]=290\end{cases}\text{或}\begin{cases}4x=5y\\2\left[5y+(x+y)\right]=290\end{cases};$$

解得$\begin{cases}x=25\\y=20\end{cases}$;

每个小长方形的面积是$25\times20=500$平方厘米。

【第 23 题】
由于天气逐渐冷起来，牧场上的草不仅不长，反而以固定的速度在减少。如果某块草地上的草可供25头牛吃4天，或可供16头牛吃6天，那么可供10头牛吃________天。
【分析与解】
牛吃草问题。
设1头牛1天吃1份;
25头牛4天吃$25\times4=100$份;
16头牛6天吃$16\times6=96$份;
草每天减少$\left(100-96\right)\div\left(6-4\right)=2$份;
牧场原有草量为$\left(25+2\right)\times4=108$或$\left(16+2\right)\times6=108$份;
这片牧场可供10头牛吃$108\div\left(10+2\right)=9$天。

【第 24 题】
园林工人要在周长300米的圆形花坛边等距离地栽上树。他们先沿着花坛的边每隔3米挖一个坑，当挖完30个坑时，突然接到通知：改为每隔5米栽一颗树。这样，他们还要挖________个坑才能完成任务。
【分析与解】
植树问题，约数。
周长300米的圆形花坛，每隔5米挖一个坑，需要挖$300\div5=60$个坑。
其中已经挖了30个坑，这段长度为$3\times\left(30-1\right)=87$米;
每$\left[3,5\right]=15$米的坑不用重新再挖;
$87\div15=5\cdots\cdots12$，这种不用再挖的坑有$5+1=6$个;
故他们还要挖$60-6=54$个坑才能完成任务。

【第 25 题】
由数字1，2，7可以组成________个无重复数字的自然数。
【分析与解】
计数，乘法原理，加法原理。
一位数有3个：1、2、7;
两位数有$3\times2=6$个：12、17、21、27、71、72;
三位数有$3\times2\times1=6$个：127、172、217、271、712、721;
由数字1，2，7可以组成$3+6+6=15$个无重复数字的自然数。

【第 26 题】
甲、乙二人沿着同一条200米的跑道赛跑，甲由起跑线上起跑，乙在甲后20米处起跑，当甲离终点还有20米时，乙追上甲，那么当乙跑到终点时，甲离终点还有________米。
【分析与解】
行程问题，比例行程。
甲跑 $200-20=180$ 米，乙跑 $200+20-20=200$ 米；
甲、乙两人的速度比 $v_{甲}:v_{乙}=180:200=9:10$；
故当乙跑到终点时，乙跑了 $200+20=220$ 米，甲跑了 $220\div10\times9=198$ 米，甲离终点还有 $200-198=2$ 米。

【第 27 题】
在 $1\sim100$ 的全部自然数中（包括1和100），不是5的倍数也不是7的倍数的数有________个。
【分析与解】
在 $1\sim100$ 的全部自然数中（包括1和100），
$100\div5=20$ 个，5的倍数有20个；
$100\div7=14\cdots\cdots2$，7的倍数有14个；
$[5,7]=35$，$100\div35=2\cdots\cdots30$，既是5的倍数又是7的倍数有2个；
5的倍数或7的倍数有 $20+14-2=32$ 个；
不是5的倍数也不是7的倍数的数有 $100-32=68$ 个。

【第 28 题】
某班的小书库里有 A、B、C、D 四类书，规定每个同学最多可以借两本，这个班有45名同学。那么至少有________个同学所借的书类型完全相同？（不能不借）
【分析与解】
抽屉原理。
【理解方式1】
1种类型的书有4种：A 或 AA、B 或 BB、C 或 CC、D 或 DD；
2种类型的书有 $C_4^2=6$ 种：AB、AC、AD、BC、BD、CD；
借书类型不同的一共有 $4+6=10$ 种；
$45\div10=4\cdots\cdots5$；
由抽屉原理，至少有 $4+1=5$ 个同学所借的书类型完全相同。
【理解方式2】
1本书有4种：A、B、C、D；
2本相同的书有4种：AA、BB、CC、DD；
2种不同的书有 $C_4^2=6$ 种：AB、AC、AD、BC、BD、CD；
借书类型不同的一共有 $4+4+6=14$ 种；
$45\div14=3\cdots\cdots3$；
由抽屉原理，至少有 $3+1=4$ 个同学所借的书类型完全相同。

【第 29 题】

掷出 2 个骰子，将 2 个骰子掷出的点数相加，和最有可能得到的数字是 ________ 。（每个骰子是正方体，6 个面上分别是1到6，例如：第一个骰子掷出3，第二个骰子掷出5，那么两个点数的和就是8）

【分析与解】

点数和	情况	种数
2	1+1	1
3	1+2、2+1	2
4	1+3、2+2、3+1	3
5	1+4、2+3、3+2、4+1	4
6	1+5、2+4、3+3、4+2、5+1	5
7	1+6、2+5、3+4、4+3、5+2、6+1	6
8	2+6、3+5、4+4、5+3、6+2	5
9	3+6、4+5、5+4、6+3	4
10	4+6、5+5、6+4	3
11	5+6、6+5	2
12	6+6	1

和最有可能得到的数字是7。

【第 30 题】

有一些 $2n$ 位数具有如下性质：将其从正中间断开，可以得到两个 n 位数（当然，第二个数的首位可能为 0 ），这个 $2n$ 位数恰好是两个 n 位数和的平方。例如：$81=(8+1)^2$，$9801=(98+01)^2$，$494209=(494+209)^2$。那么除了 9801 外，具有该性质的四位数是________。（写出一个即可）

【分析与解】

数论。

设这个是四位数 $\overline{abcd}$；

因为 $\overline{abcd}=\overline{ab}\times100+\overline{cd}=\overline{ab}\times99+(\overline{ab}+\overline{cd})=(\overline{ab}+\overline{cd})^2$；

所以 $\overline{ab}\times99=(\overline{ab}+\overline{cd})^2-(\overline{ab}+\overline{cd})=(\overline{ab}+\overline{cd})(\overline{ab}+\overline{cd}-1)$；

因为 $99=3^2\times11=9\times11$，而且 $\overline{ab}+\overline{cd}$、$\overline{ab}+\overline{cd}-1$ 互质；

所以 $\overline{ab}+\overline{cd}$、$\overline{ab}+\overline{cd}-1$ 中必有一个是 11 的倍数，也必有一个是 9 的倍数；

由于 $100\times(100-1)=9900$，$101\times(101-1)=10100$；

故 $\overline{ab}+\overline{cd}\leqslant99$。

(1)当 $\overline{ab}+\overline{cd}$ 是 11 的倍数时；

$\overline{ab}+\overline{cd}$	$\overline{ab}+\overline{cd}-1$
11	10
22	21
33	32
44	43
55	54
66	65
77	76
88	87
99	98

其中符合条件的是 $\begin{cases}\overline{ab}+\overline{cd}=55\\\overline{ab}+\overline{cd}-1=54\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\overline{ab}+\overline{cd}=99\\\overline{ab}+\overline{cd}-1=98\end{cases}$；

所以 $\overline{abcd}=55^2=3025$ 或 $\overline{abcd}=99^2=9801$。

(2)当 $\overline{ab}+\overline{cd}-1$ 是11的倍数时;

$\overline{ab}+\overline{cd}-1$	$\overline{ab}+\overline{cd}$
11	12
22	23
33	34
44	45
55	56
66	67
77	78
88	89

其中符合条件的是 $\begin{cases}\overline{ab}+\overline{cd}=45\\ \overline{ab}+\overline{cd}-1=44\end{cases}$;

所以 $\overline{abcd}=45^2=2025$;

所以 $\overline{abcd}=2025$ 或 3025 或 9801。

故此题答案为 2025 或 3025。（写出一个即可）

【背景】

将一个 $2n$ 位数的前 n 位数和后 n 位数各当成一个 n 位数，如果这两个 n 位数之和的平方正好等于这个 $2n$ 位数，则称这个 $2n$ 位数为卡布列克（ *Kabulek* ）怪数。