

第十讲 考虑所有可能情况（一）

有些数学题，要求把符合条件的算式或得数全部找出来；若漏掉一个，答案就不对。做这种题，特别强调有秩序的思考。

例1 从2个5分硬币、5个2分硬币、10个1分硬币中，拿出1角钱来，有多少种不同的拿法？

解：找出所有不同的搭配情况，共10种见下表。

5分	2分	1分	算式
2个			$5+5=10$
1个	2个	1个	$5+2+2+1=10$
	1个	3个	$5+2+1+1+1=10$
		5个	$5+1+1+1+1+1=10$
	5个		$2+2+2+2+2=10$
	4个	2个	$2+2+2+2+1+1=10$
	3个	4个	$2+2+2+1+1+1+1=10$
	2个	6个	$2+2+1+1+1+1+1+1=10$
	1个	8个	$2+1+1+1+1+1+1+1+1=10$
		10个	$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=10$

例2 5个茶杯的价钱分别是9角、8角、6角、4角和3角，3个茶盘的价钱分别是7角、5角和2角；如果一个茶杯配一个茶盘，一共可以配成多少种不同价钱的茶具？

解：采取“笨”办法进行搭配。先把各种不同价钱的茶杯都配上一个7角钱的茶盘，得出不同价钱的茶具如下：

$$\begin{array}{r}
 9, 8, 6, 4, 3 \\
 +) 7, 7, 7, 7, 7 \\
 \hline
 16, 15, 13, 11, 10
 \end{array}$$

将这些茶杯与5角钱的茶盘搭配，又可得出一些不同价钱的茶具，但要注意去掉那些与前面相同的价钱：

$$\begin{array}{r}
 9, 8, 6, 4, 3, \\
 +) 5, 5, 5, 5, 5 \\
 \hline
 14, 13, 11, 9, 8
 \end{array}$$

再将这些茶杯与2角钱的茶盘搭配，同时去掉那些与前面相同的价钱：

$$\begin{array}{r} 9, 8, 6, 4, 3 \\ +) 2, 2, 2, 2, 2 \\ \hline 11, 10, 8, 6, 5 \end{array}$$

最后数一数，共有10种不同价钱的茶具. 这些价钱是1元6角，1元5角，1元4角，1元3角，1元1角，1元，9角，8角，6角，5角.

例3 将无法区分的7个苹果放在三个同样的盘子里，允许有的盘子空着不放. 问共有多少种不同的放法？

解：用数字代表盘子里的苹果数，用由3个数字组成的数组表示不同的放置方式. 如(7, 0, 0)表示：一个盘子里放7个苹果，而另外两个盘子里都空着不放. 各种可能的放置情况如下：

(7, 0, 0)

(6, 1, 0)

(5, 2, 0), (5, 1, 1)

(4, 3, 0), (4, 2, 1)

(3, 3, 1), (3, 2, 2)

数一数，共有8种不同的放法.

例4 把一个整数表示成若干个小于它的自然数之和，通常叫做整数的分拆. 问整数4有多少种不同的分拆方式？

解：分拆时，使自然数按由大到小的顺序出现. 可以看出，共有4种不同的分拆方式：

$$4=3+1$$

$$4=2+2$$

$$4=2+1+1$$

$$4=1+1+1+1.$$

例5 邮局门前共有5级台阶. 若规定一步只能登上一级或两级, 问上这个台阶共有多少种不同的上法?

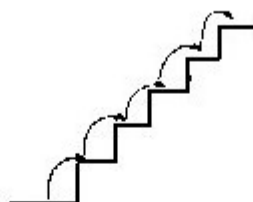


图10-1

解: 如图10—1, 同时用数组表示不同的上法.

(1, 1, 1, 1, 1) 表示每步只上一级, 只有1种上法.

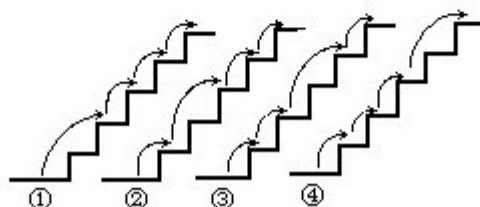


图10-2

见图10—2, ① (2, 1, 1, 1) ② (1, 2, 1, 1)

③ (1, 1, 2, 1) ④ (1, 1, 1, 2)

表示有一步上两个台阶, 其他几步都各上一个台阶, 共有四种上法.

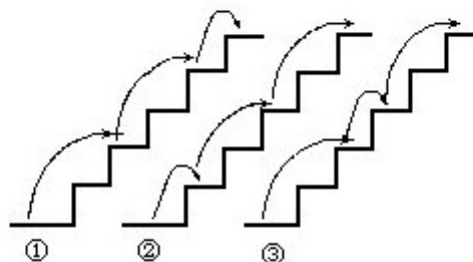


图10-3

见图10—3, ① (2, 2, 1), ② (1, 2, 2),

③ (2, 1, 2).

表示有两步各上两个台阶, 有一步上一个台阶, 这种上法共有3种. 因此, 上台阶共有 $1+4+3=8$ 种不同的上法.