

一. 填空题 I（每小题 8 分，共 32 分）

1. 算式 $5 \times \frac{(2014-12) \times 20}{930-830}$ 的计算结果是_____.

【考点】分数计算

【难度】☆

【答案】2002

【分析】原式 $= 5 \times \frac{2002 \times 20}{100} = 2002$

2. 数学小组原计划将 72 个苹果发给学生，每人发的苹果数量一样多，后来又有 6 人加入小组，这样每个学生比原计划少发了 1 个苹果. 那么，原来有_____名学生.

【考点】因数与倍数

【难度】☆☆

【答案】18

【分析】前后两次每人分到的苹果数量相差 1，且都是 72 的因数，72 的相差 1 的因数对有 (1,2) (2,3) (3,4) 和 (8,9)，经试因数对 (3,4) 符合要求：前后人数分别为 $72 \div 4 = 18$ 人和 $72 \div 3 = 24$ 人.

3. 在如图每个方框中填入一个数字，使得乘法竖式成立. 那么，两个乘数的和是_____.

$$\begin{array}{r}
 \square\square \\
 \times \quad \square 5 \\
 \hline
 \square 1 \square \\
 \square 0 \square \\
 \hline
 2\square\square\square
 \end{array}$$

【考点】竖式数字谜

【难度】☆☆☆

【答案】118

【分析】如下左图所示， $\square 1 \square$ 是被乘数的 5 倍，其百位数字不可能是 9，则乘积的百位处加法没有进位，易知 $\square 0 \square$ 的百位为 2，如右图所示；

$$\begin{array}{r}
 \square\square \\
 \times \quad \square 5 \\
 \hline
 \square 1 \square \\
 \square 0 \square \\
 \hline
 2\square\square\square
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \square\square \\
 \times \quad \square 5 \\
 \hline
 \square 1 \square \\
 \underline{2} 0 \square \\
 \hline
 2\square\square\square
 \end{array}$$

20□ 作为一个两位数 and 一位数的乘积，对其进行枚举拆分：

$200 = 50 \times 4 = 40 \times 5$ ，但 50 和 40 的 5 倍均不能得到 $\square 1 \square$ ；

$201 = 67 \times 3$ ，67 的 5 倍不能得到 $\square 1 \square$ ；

202 无法分解为两位数与一位数的乘积；

$203 = 29 \times 7$ ，29 的 5 倍不能得到 $\square\square$ ；

$204 = 68 \times 3 = 51 \times 4$ ，68 和 51 的 5 倍不能得到 $\square\square$ ；

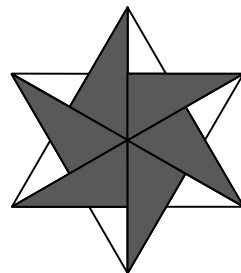
$205 = 41 \times 5$ ，68 和 51 的 5 倍不能得到 $\square\square$ ；

206 无法分解为两位数与一位数的乘积；

$207 = 69 \times 3 = 23 \times 9$ ，其中 $23 \times 5 = 115$ 符合要求；

综上，这个乘法算式为 23×95 ，两个乘数之和为 $23 + 95 = 118$ 。

4. 右图六角星的 6 个顶点恰好是一个正六边形的 6 个顶点。那么阴影部分面积是空白部分面积的 _____ 倍。

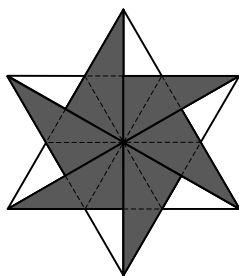


【考点】图形分割

【难度】☆☆

【答案】3

【分析】如下图将原图形分割为完全相同的 24 个小三角形，其中空白部分 6 块，阴影部分 18 块，显然阴影部分面积是空白部分的 3 倍。



二. 填空题 II (每小题 10 分, 共 40 分)

5. A 和 B 是两个非零自然数， A 是 B 的 24 倍， A 的因数个数是 B 的 4 倍，那么 A 与 B 的和最小是 _____。

【考点】因数个数定理

【难度】☆☆☆

【答案】100

【分析】若 $\begin{cases} A=2 \\ B=48=2^4 \times 3 \end{cases}$ ， A 的因数个数为 2， B 的因数个数为 $5 \times 2 = 10$ ，不符合要求；

若 $\begin{cases} A=3 \\ B=72=2^3 \times 3^2 \end{cases}$ ， A 的因数个数为 2， B 的因数个数为 $4 \times 3 = 12$ ，不符合要求；

若 $\begin{cases} A=4=2^2 \\ B=96=2^5 \times 3 \end{cases}$ ， A 的因数个数为 3， B 的因数个数为 $6 \times 2 = 12$ ，符合要求；

可见 $A+B$ 的最小值为 $4+96=100$ 。

6. 珊珊和希希各有若干张积分卡.

珊珊对希希说:“如果你给我 3 张, 我的张数就是你的 3 倍.”

希希对珊珊说:“如果你给我 4 张, 我的张数就是你的 4 倍.”

珊珊对希希说:“如果你给我 5 张, 我的张数就是你的 5 倍.”

这三句话中有一句话是错的. 那么, 原来希希有_____张积分卡.

【考点】逻辑推理

【难度】☆☆

【答案】9

【分析】设珊珊和希希的积分卡数量分别为 x 和 y ;

若第一句和第二句是对的, 则 $\begin{cases} x+3=3(y-3) \\ y+4=4(x-4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-x=12 \\ 4x-y=20 \end{cases}$, 无整数解;

若第一句和第三句是对的, 则 $\begin{cases} x+3=3(y-3) \\ x+5=5(y-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-x=12 \\ 5y-x=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=9 \end{cases}$, 即希希原来有 9 张积分卡,

经验证符合题目要求.

7. 将 1 至 8 填入方格中, 使得数列 $\square\square, 9, \square\square, \square\square, \square\square$ 从第三个项开始, 每一项都等于前面两项的和, 那么这个数列的所有项之和是_____.

【考点】横式数字谜

【难度】☆☆☆

【答案】198

【分析】第三个数比第一个数多 9, 第四个数比第三个数多 9;

若第一个数除以 9 余 a , 则第三个数和第四个数也余 a , 第五个数则余 $2a$, 五个数总和除以 9 余 $4a$;

而由于 $1+2+3+\cdots+9=45$ 是 9 的倍数, 易知 $a=0$, 即这五个数都是 9 的倍数;

若设第一个数为 18, 则这五个数分别为 18, 9, 27, 36, 63; 6 出现两次不符合要求;

若设第一个数为 27, 则这五个数分别为 27, 9, 36, 45, 81; 符合要求.

所有项之和为 $27+9+36+45+81=198$.

8. 甲、乙、丙三户人家打算订阅报纸, 共有 5 种不同的报纸可供选择, 已知每户人家都订两份不同的报纸, 并且知道这三户人家每两户所订的报纸恰好有一份相同, 那么三户人家共有种不同的订阅方式.

【考点】计数问题

【难度】☆☆☆

【答案】180

【分析】每两户恰有 1 份报纸相同, 只有两种类型: (ab, ac, ad) 和 (ab, ac, bc) ;

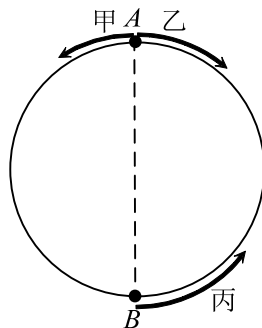
(ab, ac, ad) 中需要 4 种类型的报纸, 其中有一种报纸出现 3 次, 共 $C_5^1 \times A_4^3 = 5 \times 24 = 120$ 种;

(ab, ac, bc) 中需要 3 种类型的报纸, 共 $C_5^3 \times A_3^3 = 10 \times 6 = 60$ 种;

综上, 合计 $120+60=180$ 种订阅方式.

三. 填空题Ⅲ（每小题 12 分，共 48 分）

9. 如图， A 、 B 为圆形轨道一条直径的两个端点. 甲、乙、丙三个微型机器人在环行导轨上同时出发，作匀速圆周运动. 甲、乙从 A 出发，丙从 B 出发；乙顺时针运动，甲、丙逆时针运动. 出发后 12 秒钟甲到达 B ，再过 9 秒钟甲第一次追上丙时恰好也和乙第一次相遇；那么当丙第一次到达 A 后，再过_____秒钟，乙才第一次到达 B .



【考点】环形跑道

【难度】☆☆☆

【答案】56

【分析】设半周长为 $[12, 21] = 84$ ，则甲的速度为 $84 \div 12 = 7$ ；

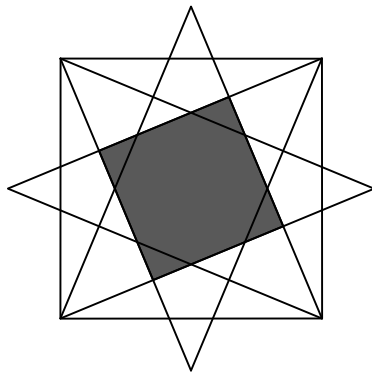
甲用 $12 + 9 = 21$ 秒追上丙，可见甲丙的速度差为 $84 \div 21 = 4$ ，则丙的速度为 $7 - 4 = 3$ ；

乙丙 21 秒相遇，可见乙丙的速度和为 $84 \div 21 = 4$ ，则乙的速度为 $4 - 3 = 1$ ；

丙到达 A 需要 $84 \div 3 = 28$ （秒），乙到达 B 需要 $84 \div 1 = 84$ （秒）；

可见，丙到达 A 后 $84 - 28 = 56$ （秒）乙到达 B .

10. 如图，分别以一个面积为 169 的正方形的四条边为底，做 4 个面积为 101.4 平方厘米的等腰三角形. 图中阴影部分的面积是_____平方厘米.



【考点】勾股定理&弦图

【难度】☆☆☆☆

【答案】49

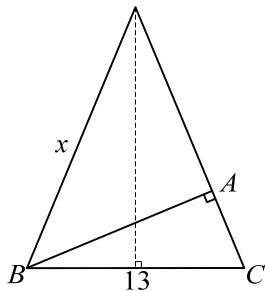
【分析】 $169 = 13^2$ ，可见大正方形的边长为 13；

等腰三角形的高为 $\frac{101.4 \times 2}{13} = 15.6$ ，则若设等腰三角形的腰为 x ，如下图所示，

根据勾股定理： $x^2 = 6.5^2 + 15.6^2 \Rightarrow x = 16.9$ ；则下图中 $AB = \frac{101.4 \times 2}{16.9} = 12$ ；

再根据勾股定理： $AC^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow AC = 5$ ；

从弦图的角度看原图，易知中间正方形的边长为 $12 - 5 = 7$ ，则其面积为 $7^2 = 49$



11. 如果一个数的数字和与它 3 倍的数字和相同，却与它 2 倍的数字和不同，我们称这种数为“奇妙数”，那么，最小的“奇妙数”是_____.

【考点】弃九法&最值

【难度】☆☆☆☆

【答案】144

【分析】 $3x$ 的数字和与 x 的数字和相同，则 $3x$ 与 x 对 9 同余，显然 x 是 9 的倍数；

根据“弃九法”，和的数字和=加数的数字和-进位次数 $\times 9$ ；

若 x 为一位数，只能是 9， $9+9=18$ 不符合 $x+x$ 数字和与 x 的数字和不同的要求；

若 x 为两位数 \overline{ab} ，且 $a+b=18$ ，只能是 99，而 $99+99=198$ ，同上，不符合要求；

若 x 为两位数 \overline{ab} ，且 $a+b=9$ ， $\overline{ab}+\overline{ab}$ 时总是进 1 次位，最终和的数字和还是 9；

若 x 为三位数 \overline{abc} ，且 $a+b+c=9$ ，若令 $\overline{abc}+\overline{abc}$ 时没有进位，则 a, b, c 均不超过 4，此时 \overline{abc} 最小为 144，经验证符合要求；