

# 2015年“数学花园探秘”科普活动

## 小学高年级组决赛试卷 A

(测评时间：2015年1月31日 8:00—9:30)

### 一. 填空题 I (每小题 8 分, 共 40 分)

1. 算式  $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \div \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$  的计算结果是\_\_\_\_\_.

【考点】分数计算

【难度】☆☆

【答案】1

【分析】分子  $= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$

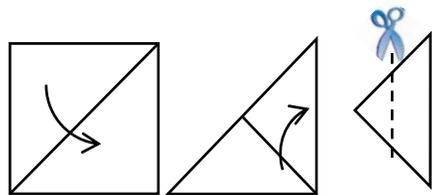
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \times 2$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

可见原式=1

2. 一张边长为 10 厘米的正方形纸片, 如图对折两次, 再沿两边的中点连线剪掉一个角之后, 那么把余下部分展开为单层纸片的面积是\_\_\_\_\_平方厘米.



【考点】几何

【难度】☆☆

【答案】75

【分析】设剪下来的四个等腰直角三角形的直角边为  $a$ , 则正方形的面积为  $(4a)^2 \div 2 = 100 \Rightarrow a^2 = 12.5$ ,

剪下来的部分其面积为  $\frac{1}{2}a^2 \times 4 = 2a^2 = 2 \times 12.5 = 25$ , 则余下部分面积为 75.

3.  $A, B, C, D$  四个人住进编号为 1, 2, 3, 4 的四个房间, 每个房间恰住一人; 那么  $B$  不住 2 号房间, 并且  $B, C$  两人要求住在编号相邻房间的住法共有\_\_\_\_\_种.

【考点】计数

【难度】☆☆☆

【答案】8

【分析】若  $B$  住在 1 号房间, 则  $C$  住在 2 号房间,  $A, D$  住在 3、4 号房间, 共 2 种住法;

若  $B$  住在 3 号房间, 则  $C$  住在 2 号或 4 号房间,  $A, D$  住在剩下两个房间, 共  $2 \times 2 = 4$  种住法;

若 B 住在 4 号房间, 则 C 住在 3 号房间, A、D 住在 1、2 号房间, 共 2 种住法;  
综上, 合计  $2+4+2=8$  种住法.

4. 算式  $2015 \frac{1999}{2015} \times \frac{1}{4} - \frac{2011}{2015}$  的计算结果是\_\_\_\_\_.

【考点】分数计算

【难度】☆☆☆

【答案】503

【分析】原式  $= \frac{2015^2 + 1999}{2015 \times 4} - \frac{2011 \times 4}{2015 \times 4}$   
 $= \frac{2015^2 - 6045}{2015 \times 4}$   
 $= \frac{2015^2 - 2015 \times 3}{2015 \times 4}$   
 $= \frac{2015 \times 2012}{2015 \times 4}$   
 $= 503$

5. 哈利波特制作加强型魔法药剂“生死水”(这是一种效力很强的安眠药, 由水仙根粉末和艾草浸液配成, “生死水”的浓度是指水仙根粉末占整个药剂的百分比). 他首先在普通型“生死水”中加入一定量的艾草浸液, 使“生死水”的浓度变为 9%; 如果再加入同等量的水仙根粉末, 这时“生死水”的浓度变为 23%; 那么普通型“生死水”的浓度为\_\_\_\_\_%.

【考点】浓度问题

【难度】☆☆☆

【答案】11

【分析】设普通型“生死水”的浓度为  $x\%$ , 初始重量为 100, 连续两次加入的艾草浸液和水仙根粉末重量都是  $a$ , 则:

$$\begin{cases} \frac{x}{100+a} = 9\% \\ \frac{x+a}{100+2a} = 23\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100x - 9a = 900 \\ 100x + 54a = 2300 \end{cases} \Rightarrow x = 11$$

综上, 普通“生死水”的浓度为 11%

## 二. 填空题 II (每小题 10 分, 共 50 分)

6. 一次考试有 3 道题, 四个好朋友考完后核对答案, 发现四人分别对了 3、2、1、0 道题. 这时老师问: 你们考的怎么样啊? 他们每人说了 3 句话(如下).

甲: 我对了两道题, 而且比乙对的多, 丙考的不如丁.

乙: 我全对了, 丙全错了, 甲考的不如丁.

丙: 我对了一道, 丁对了两道, 乙考的不如甲.

丁: 我全对了, 丙考的不如我, 甲考的不如乙.

如果每人都是对了几道题就说几句真话. 设甲、乙、丙、丁依次对了  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  道题, 那么四位数  $\overline{ABCD} =$ \_\_\_\_\_.

【考点】逻辑推理

【难度】☆☆☆☆

【答案】1203

【分析】全对的人不会说自己对的题少于3，故只有乙、丁可能全对。若乙全对，则排名是乙、丁、甲、丙，与丙所说的“丁对了2道”是假话相矛盾；则丁全对，则丙的后两句是假话，不可能是第二名，又由丁的“甲考得不如乙”能知道第二名是乙，故丙全错，甲只有“丙考得不如丁”是真话，排名是丁、乙、甲、丙，即 $\overline{ABCD}=1203$ 。

7. 右边算式中，不同的汉字代表不同的数字。如果 $\overline{\text{二零一五}}=2015$ ，且两位数 $\overline{\text{数学}}$ 是质数，那么四位数 $\overline{\text{数学花园}}=$ \_\_\_\_\_。

$$\overline{\text{二零一五}} = \overline{\text{数学}} + \overline{\text{花园}} \times \text{探} \times \text{秘}$$

【考点】数字谜

【难度】☆☆☆☆

【答案】8369

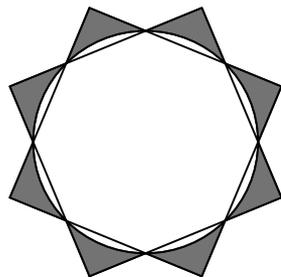
【分析】 $\overline{\text{数学}}$ 中至多有3,6,9中的一个，则“花”、“园”、“探”、“秘”中至少有3,6,9中的两个，若两个都在“花园”中，则 $\overline{\text{花园}} \times \text{探} \times \text{秘}$ 是3的倍数，若有一个在“探”和“秘”中， $\overline{\text{花园}} \times \text{探} \times \text{秘}$ 也是3的倍数，由此可见，“数学”与2015对3同余，即除以3余2，作为质数，“数学”只能是47,83和89；

若 $\overline{\text{数学}}=37$ ，则 $\overline{\text{花园}} \times \text{探} \times \text{秘} = 2015 - 37 = 1978$ ，而 $1978 = 2 \times 989$ ，“花园”只能是98或82，均不符合要求；

若 $\overline{\text{数学}}=83$ ，则 $\overline{\text{花园}} \times \text{探} \times \text{秘} = 2015 - 83 = 1932$ ，而 $1932 = 2^2 \times 3 \times 4 \times 23$ ，当“花园”为69时，“探”和“秘”分别是4和7，符合要求，即 $2015 = 83 + 69 \times 4 \times 7$ ；

综上， $\overline{\text{数学花园}}=8369$ 。

8. 右图的图案由1个圆和2个大小相同的正方形组成（2个正方形的公共部分为正八边形）。如果圆的半径为60厘米，那么阴影部分的面积是\_\_\_\_\_平方厘米。（ $\pi$ 取3.14）

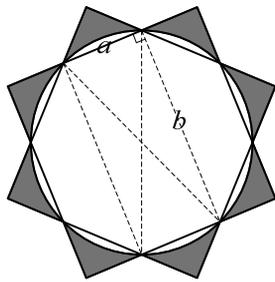


【考点】几何

【难度】☆☆☆☆

【答案】3096

【分析】如下图，设小直角三角形的斜边长为 $a$ ，大正方形的边长为 $b$ ，则根据勾股定理 $a^2 + b^2 = 120^2 = 14400$ ， $b^2$ 表示大正方形的面积， $a^2$ 表示4个小直角三角形的面积，恰好构成下图的总面积，即总面积为14400，则阴影面积为 $14400 - 3.14 \times 60^2 = 3096$



9. 如果一个自然数的各位数字能够分成两组，使得每组中的数字之和相等，则称这个数为“均衡数”。例如 25254 是“均衡数”，因为  $5+2+2=4+5$ 。如果相邻的两个自然数都是“均衡数”，则称这对“均衡数”为“孪生均衡数”。那么最小的一对“孪生均衡数”的和是\_\_\_\_\_。

【考点】数论，弃九法

【难度】☆☆☆

【答案】1099

【分析】两位数没有符合要求的数，99、100 亦不符合，故知至少为三位数。两个相邻数数字和都是偶数，说明必有进位，且三位数必然只进 1 次位（数字和加 1 再减 9），即这两个数是  $\overline{ab9}$  和  $\overline{a(b+1)0}$ ，必有  $a+b=9$  和  $a=b+1$ ，故这两个数为 549 和 550。  $549+550=1099$ 。

10. 一艘轮船从 A 港出发顺流而下到同一条河上的 B 港，再逆流而上返回 A 港，共用 3.2 小时；如果第 1 小时、第 2 小时、第 3 小时轮船分别所行路程依次成等差数列，且水流速度为每小时 2 千米；那么轮船往返 A、B 两港共行\_\_\_\_\_千米。

【考点】行程，比例行程

【难度】☆☆☆

【答案】102

【分析】第一小时若已经有逆水段，则第二小时、第三小时路程相同，不可能出现等差数列，故第一小时全顺水，同理第三小时全逆水，第二小时既有顺水又有逆水。且若路程是等差数列，第二小时必为半小时顺水半小时逆水。

故顺水 1.5 小时的路程恰好是逆水 1.7 小时的路程， $V_{顺}:V_{逆}=17:15$ ，且  $V_{顺}-V_{逆}=2\times 2=4$  千米每时，故  $V_{顺}=34$  千米每时，往返共行  $34\times 1.5\times 2=102$  千米。

### 三. 填空题 III (每小题 12 分，共 60 分)

11. 三位数  $\overline{abc}$  除以它的各位数字和的余数是 1，三位数  $\overline{cba}$  除以它的各位数字和的余数也是 1。如果不同的字母代表不同的数字，且  $a>c$ ，那么  $\overline{abc}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【考点】数论，位值原理，整除分析

【难度】☆☆☆

【答案】452

【分析】 $\overline{abc}-\overline{cba}=99(a-c)$ ，故  $(a+b+c)\mid[99(a-c)]$ ，但  $(a+b+c)$  必定不是 3 的倍数，否则  $\overline{abc}$  是 3 的倍数， $\overline{abc}\div(a+b+c)$  的余数必为 3 的倍数。故  $(a+b+c)\mid[11(a-c)]$ ，11 是质数，且  $a+b+c>a-c$ ，故  $(a+b+c)$  必为 11 的倍数。

若  $a+b+c=11$ ，则  $a+c-b=1$ ， $b=5$ ，又  $a、b、c$  互不相同， $a>c$ ，故  $a=4$ ， $c=2$ ， $\overline{abc}=452$ ；

若  $a+b+c=22$ ，则  $a+c-b=12$ ， $b=5$ ，又  $a、b、c$  互不相同， $a>c$ ，故  $a=9$ ， $c=8$ ，但此解并未满足  $(a+b+c)|[11(a-c)]$  的要求，故知此种情况无解。

综上，本题有唯一答案 452

12. 在右图的每个方格里填入数字 1~6 中的一个，使得每行和每列的数字都不重复。右边的数表示由粗线隔开的前面三个数字组成的三位数、中间两个数字组成的两位数以及最后的一位数这三个数之和。那么五位数  $\overline{ABCDE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$A$				1		480
	$B$		3		4	255
		$C$		5		408
	6		$D$		2	606
1		6		$E$		165
	5		1			669

【考点】数独

【难度】☆☆

【答案】41244

【分析】通过百位分析，显然  $A=4$ ，进而个位要凑出 0 必须  $1+3+6$ ，可知第一行为 423516；

类似地，第二行第一个数为 2，个位  $5+6+4$ ，215364， $B=1$ ；

第三行第一个数为 3，个位  $5+1+2$ ，342651， $C=2$ ；

第四行第一个数为 5，个位  $2+1+3$ ，561432， $D=4$ ；

第五行个位  $6+4+5$ ，136245， $E=4$ ；

第六行 654123。

13. 某班共有 30 名学生去看电影，他们的学号依次为 1, 2, ……，30；他们手中的电影票恰好为某排的 1 号, 2 号, ……，30 号。现在按如下要求将电影票发给这些同学：对于任意两人甲、乙，若甲的学号能被乙的学号整除，则甲的电影票号码也能被乙的电影票号码整除。那么电影票共有 \_\_\_\_\_ 种不同的发放方式。

【考点】组合，数论，计数

【难度】☆☆☆☆

【答案】48

【分析】1 号学生有 29 人是其倍数，故 1 号学生只能拿 1 号电影票；

2 号学生有 14 人是其倍数，故 2 号学生只能拿 2 号电影票；

3 号学生有 9 人是其倍数，故 3 号学生只能拿 3 号电影票；

4 号学生有 6 人是其倍数，故 4 号学生只能拿 4 号电影票；

5 号学生有 5 人是其倍数，故 5 号学生只能拿 5 号电影票；

6 号学生有 4 人是其倍数，故 6 号学生只能拿 6 号电影票；

7 号学生有 3 人是其倍数，故 7 号学生只能拿 7 号电影票；

8 号学生必须是 2 号学生 (2) 的倍数，也必须是 4 号学生 (4) 的倍数，同时有 2 人是其倍数，综上，8 号学生只能拿 8 号电影票；

9 号学生必须是 3 号学生 (3) 的倍数，还不能是 6，同时有 2 人是其倍数，综上，9 号学生只

能拿 9 号电影票；

10 号学生必须是 2 号学生 (2) 的倍数, 也必须是 5 号学生 (5) 的倍数, 同时有 2 人是其倍数, 综上, 10 号学生只能拿 10 号电影票;

12 号学生必须是 3 号学生 (3) 的倍数, 也必须是 4 号学生 (4) 的倍数, 同时有 1 人是其倍数, 综上, 12 号学生只能拿 12 号电影票; 同时 24 号学生只能拿 24 号电影票;

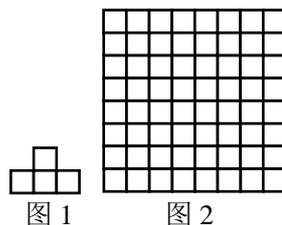
14 号学生必须是 2 号学生 (2) 的倍数, 也必须是 7 号学生 (7) 的倍数, 同时有 1 人是其倍数, 综上, 14 号学生只能拿 14 号电影票; 同时 28 号学生只能拿 28 号电影票;

15 号学生必须是 3 号学生 (3) 的倍数, 也必须是 5 号学生 (5) 的倍数, 同时有 1 人是其倍数, 综上, 15 号学生只能拿 15 号电影票; 同时 30 号学生只能拿 30 号电影票;

之后的数,  $18=[2,9]$ , 18 必拿 18, 同时是 9 的倍数的 27 号只能拿 27;  $20=[4,5]$ , 20 必拿 20;  $21=[3,7]$ , 21 必拿 21;  $24=[3,8]$ , 24 必拿 24, 同时是 8 的倍数的 16 号只能拿 16;  $28=[4,7]$ , 28 必拿 28;  $30=[5,6]$ , 30 必拿 30, 同时是 5 的倍数的 25 号只能拿 25.

目前还没有确定的数有: 11、22、13、26、17、19、23、29 号. 11、22 互为一组成倍数, 13、26 亦互为一组成倍数, 有两种拿法: 11 号拿 11, 22 号拿 22, 13 号拿 13, 26 号拿 26; 或 11 号拿 13, 22 号拿 26, 13 号拿 11, 26 号拿 22. 17、19、23、29 是大质数, 没有限制, 可随意拿, 有  $A_4^4=24$  种拿法. 故共有  $2 \times 24=48$  种拿法.

14. 图 2 的  $8 \times 8$  表格中共含有 168 个如图 1 的“T”形. 现对图 2 中的每个小方格染成黑色或白色; 如果一个“T”形中黑白小方格各 2 个, 则称这个“T”形为“和谐”的; 那么对图 2 的各种染色方案, “和谐”的“T”形至多有\_\_\_\_\_个.



【考点】组合, 染色问题, 构造与论证

【难度】☆☆☆☆☆

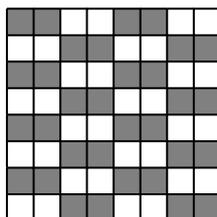
【答案】132

【分析】考察每一个“”形, 枚举可知, 其中的四个“”形最多只有 3 个“和谐”的 (举

例: ). 在一个  $8 \times 8$  的方格阵中, 共有 36 个“”形, 故知必然至少有 36 个“”

形不是“和谐”的. 即本题理论最大值为  $168-36=132$ .

下面是一个 132 的例子:



15. 作答要求:

- (1) 请在答题卡第 15 题的万位+千位，填涂上你认为本试卷中一道最佳试题的题号；  
如认为本试卷第 6 题出得最好，那么请在万位填涂“0”，千位填涂“6”。
- (2) 请在答题卡第 15 题的百位，填涂上你认为本试卷整体的难度级别；  
最简单为“0”，最难为“9”，总计十个级别。
- (3) 请在答题卡第 15 题的十位+个位，填涂上你认为本试卷中一道最难试题的题号；  
如认为本试卷第 14 题最难，那么请在十位填涂“1”，个位填涂“4”。