

2015 年“数学花园探秘”科普活动

小学高年级组决赛试卷 A

(测评时间: 2015 年 1 月 31 日 8:00—9:30)

一. 填空题 I (每小题 8 分, 共 40 分)

1. 算式 $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \div \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)$ 的计算结果是_____.

【考点】分数计算

【难度】☆☆

【答案】1

【分析】分子 $= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$

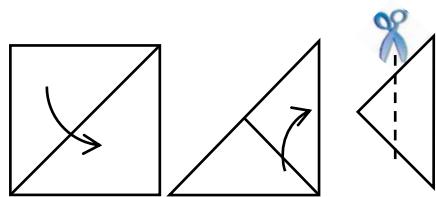
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \times 2$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

可见原式=1

2. 一张边长为 10 厘米的正方形纸片, 如图对折两次, 再沿两边的中点连线剪掉一个角之后, 那么把余下部分展开为单层纸片的面积是_____平方厘米.



【考点】几何

【难度】☆☆

【答案】75

【分析】设剪下来的四个等腰直角三角形的直角边为 a , 则正方形的面积为 $(4a)^2 \div 2 = 100 \Rightarrow a^2 = 12.5$,

剪下来的部分其面积为 $\frac{1}{2}a^2 \times 4 = 2a^2 = 2 \times 12.5 = 25$, 则余下部分面积为 75.

3. A, B, C, D 四个人住进编号为 1, 2, 3, 4 的四个房间, 每个房间恰住一人; 那么 B 不住 2 号房间, 并且 B, C 两人要求住在编号相邻房间的住法共有_____种.

【考点】计数

【难度】☆☆☆

【答案】8

【分析】若 B 住在 1 号房间, 则 C 住在 2 号房间, A, D 住在 3、4 号房间, 共 2 种住法;

若 B 住在 3 号房间, 则 C 住在 2 号或 4 号房间, A, D 住在剩下两个房间, 共 $2 \times 2 = 4$ 种住法;

若 B 住在 4 号房间，则 C 住在 3 号房间，A、D 住在 1、2 号房间，共 2 种住法；

综上，合计 $2+4+2=8$ 种住法。

4. 算式 $2015\frac{1999}{2015} \times \frac{1}{4} - \frac{2011}{2015}$ 的计算结果是_____.

【考点】分数计算

【难度】☆☆☆

【答案】503

【分析】原式 $= \frac{2015^2 + 1999}{2015 \times 4} - \frac{2011 \times 4}{2015 \times 4}$
 $= \frac{2015^2 - 6045}{2015 \times 4}$
 $= \frac{2015^2 - 2015 \times 3}{2015 \times 4}$
 $= \frac{2015 \times 2012}{2015 \times 4}$
 $= 503$

5. 哈利波特制作加强型魔法药剂“生死水”（这是一种效力很强的安眠药，由水仙根粉末和艾草浸液配成，“生死水”的浓度是指水仙根粉末占整个药剂的百分比）。他首先在普通型“生死水”中加入一定量的艾草浸液，使“生死水”的浓度变为 9%；如果再加入同等量的水仙根粉末，这时“生死水”的浓度变为 23%；那么普通型“生死水”的浓度为_____%。

【考点】浓度问题

【难度】☆☆☆

【答案】11

【分析】设普通型“生死水”的浓度为 $x\%$ ，初始重量为 100，连续两次加入的艾草浸液和水仙根粉末重量都是 a ，则：

$$\begin{cases} \frac{x}{100+a} = 9\% \\ \frac{x+a}{100+2a} = 23\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100x - 9a = 900 \\ 100x + 54a = 2300 \end{cases} \Rightarrow x = 11$$

综上，普通“生死水”的浓度为 11%

二. 填空题 II（每小题 10 分，共 50 分）

6. 一次考试有 3 道题，四个好朋友考完后核对答案，发现四人分别对了 3、2、1、0 道题。这时老师问：你们考的怎么样啊？他们每人说了 3 句话（如下）。

甲：我对了两道题，而且比乙对的多，丙考的不如丁。

乙：我全对了，丙全错了，甲考的不如丁。

丙：我对了一道，丁对了两道，乙考的不如甲。

丁：我全对了，丙考的不如我，甲考的不如乙。

如果每人都是对了几道题就说几句真话。设甲、乙、丙、丁依次对了 A 、 B 、 C 、 D 道题，那么四位数 $\overline{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【考点】逻辑推理

【难度】☆☆☆☆

【答案】1203

【分析】全对的人不会说自己对的题少于3，故只有乙、丁可能全对。若乙全对，则排名是乙、丁、甲、丙，与丙所说的“丁对了2道”是假话相矛盾；则丁全对，则丙的后两句是假话，不可能是第二名，又由丁的“甲考得不如乙”能知道第二名是乙，故丙全错，甲只有“丙考得不如丁”是真话，排名是丁、乙、甲、丙，即 $\overline{ABCD} = 1203$ 。

7. 右边算式中，不同的汉字代表不同的数字。如果 $\overline{\text{二零一五}} = 2015$ ，且两位数 $\overline{\text{数学}}$ 是质数，那么四位数 $\overline{\text{数学花园}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\overline{\text{二零一五}} = \overline{\text{数学}} + \overline{\text{花园}} \times \text{探} \times \text{秘}$$

【考点】数字谜

【难度】☆☆☆☆

【答案】8369

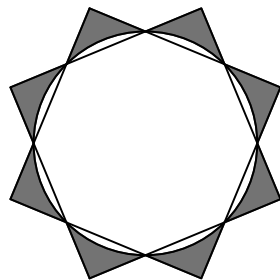
【分析】 $\overline{\text{数学}}$ 中至多有 3,6,9 中的一个，则“花”、“园”、“探”、“秘”中至少有 3,6,9 中的两个，若两个都在“花园”中，则 $\overline{\text{花园}} \times \text{探} \times \text{秘}$ 是 3 的倍数，若有一个在“探”和“秘”中， $\overline{\text{花园}} \times \text{探} \times \text{秘}$ 也是 3 的倍数，由此可见，“数学”与 2015 对 3 同余，即除以 3 余 2，作为质数，“数学”只能是 47,83 和 89；

若 $\overline{\text{数学}} = 37$ ，则 $\overline{\text{花园}} \times \text{探} \times \text{秘} = 2015 - 47 = 1968$ ，而 $1968 = 2^4 \times 3 \times 41$ ，“花园”只能是 41 或 82，均不符合要求；

若 $\overline{\text{数学}} = 83$ ，则 $\overline{\text{花园}} \times \text{探} \times \text{秘} = 2015 - 83 = 1932$ ，而 $1932 = 2^2 \times 3 \times 4 \times 23$ ，当“花园”为 69 时，“探”和“秘”分别是 4 和 7，符合要求，即 $2015 = 83 + 69 \times 4 \times 7$ ；

综上， $\overline{\text{数学花园}} = 8369$ 。

8. 右图的图案由 1 个圆和 2 个大小相同的正方形组成（2 个正方形的公共部分为正八边形）。如果圆的半径为 60 厘米，那么阴影部分的面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 平方厘米。（ π 取 3.14）

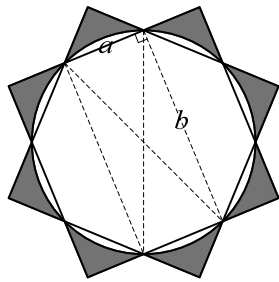


【考点】几何

【难度】☆☆☆☆

【答案】3096

【分析】如下图，设小直角三角形的斜边长为 a ，大正方形的边长为 b ，则根据勾股定理 $a^2 + b^2 = 120^2 = 14400$ ， b^2 表示大正方形的面积， a^2 表示 4 个小直角三角形的面积，恰好构成下图的总面积，即总面积为 14400，则阴影面积为 $14400 - 3.14 \times 60^2 = 3096$



9. 如果一个自然数的各位数字能够分成两组，使得每组中的数字之和相等，则称这个数为“均衡数”。例如 25254 是“均衡数”，因为 $5+2+2=4+5$ 。如果相邻的两个自然数都是“均衡数”，则称这对“均衡数”为“孪生均衡数”。那么最小的一对“孪生均衡数”的和是_____。

【考点】数论，弃九法

【难度】☆☆☆

【答案】1099

【分析】两位数没有符合要求的数，99、100 亦不符合，故知至少为三位数。两个相邻数数字和都是偶数，说明必有进位，且三位数必然只进 1 次位（数字和加 1 再减 9），即这两个数是 $\overline{ab9}$ 和 $\overline{a(b+1)0}$ ，必有 $a+b=9$ 和 $a=b+1$ ，故这两个数为 549 和 550。 $549+550=1099$ 。

10. 一艘轮船从 A 港出发顺流而下到同一条河上的 B 港，再逆流而上返回 A 港，共用 3.2 小时；如果第 1 小时、第 2 小时、第 3 小时轮船分别所行路程依次成等差数列，且水流速度为每小时 2 千米；那么轮船往返 A、B 两港共行_____千米。

【考点】行程，比例行程

【难度】☆☆☆

【答案】102

【分析】第一小时若已经有逆水段，则第二小时、第三小时路程相同，不可能出现等差数列，故第一小时全顺水，同理第三小时全逆水，第二小时既有顺水又有逆水。且若路程是等差数列，第二小时必为半小时顺水半小时逆水。

故顺水 1.5 小时的路程恰好是逆水 1.7 小时的路程， $V_{\text{顺}}:V_{\text{逆}}=17:15$ ，且 $V_{\text{顺}}-V_{\text{逆}}=2\times 2=4$ 千米每时，故 $V_{\text{顺}}=34$ 千米每时，往返共行 $34\times 1.5\times 2=102$ 千米。

三. 填空题Ⅲ（每小题 12 分，共 60 分）

11. 三位数 \overline{abc} 除以它的各位数字和的余数是 1，三位数 \overline{cba} 除以它的各位数字和的余数也是 1。如果不同的字母代表不同的数字，且 $a>c$ ，那么 $\overline{abc}=_____$ 。

【考点】数论，位值原理，整除分析

【难度】☆☆☆

【答案】452

【分析】 $\overline{abc}-\overline{cba}=99(a-c)$ ，故 $(a+b+c)\mid[99(a-c)]$ ，但 $(a+b+c)$ 必定不是 3 的倍数，否则 \overline{abc} 是 3 的倍数， $\overline{abc}\div(a+b+c)$ 的余数必为 3 的倍数。故 $(a+b+c)\mid[11(a-c)]$ ，11 是质数，且 $a+b+c>a-c$ ，故 $(a+b+c)$ 必为 11 的倍数。

若 $a+b+c=11$ ，则 $a+c-b=1$ ， $b=5$ ，又 $a、b、c$ 互不相同， $a>c$ ，故 $a=4$ ， $c=2$ ， $\overline{abc}=452$ ；

若 $a+b+c=22$ ，则 $a+c-b=12$ ， $b=5$ ，又 a 、 b 、 c 互不相同， $a>c$ ，故 $a=9$ ， $c=8$ ，但此解并未满足 $(a+b+c) \mid [11(a-c)]$ 的要求，故知此种情况无解。

综上，本题有唯一答案 452

12. 在右图的每个方格里填入数字 1~6 中的一个，使得每行和每列的数字都不重复。右边的数表示由粗线隔开的前面三个数字组成的三位数、中间两个数字组成的两位数以及最后的一位数这三个数之和。那么五位数 $\overline{ABCDE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

A				1		480
	B		3		4	255
		C		5		408
	6		D		2	606
1		6		E		165
	5		1			669

【考点】数独

【难度】☆☆

【答案】41244

【分析】通过百位分析，显然 $A=4$ ，进而个位要凑出 0 必须 $1+3+6$ ，可知第一行为 423516；

类似地，第二行第一个数为 2，个位 $5+6+4$ ，215364， $B=1$ ；

第三行第一个数为 3，个位 $5+1+2$ ，342651， $C=2$ ；

第四行第一个数为 5，个位 $2+1+3$ ，561432， $D=4$ ；

第五行个位 $6+4+5$ ，136245， $E=4$ ；

第六行 654123。

13. 某班共有 30 名学生去看电影，他们的学号依次为 1, 2, …, 30；他们手中的电影票恰好为某排的 1 号, 2 号, …, 30 号。现在按如下要求将电影票发给这些同学：对于任意两人甲、乙，若甲的学号能被乙的学号整除，则甲的电影票号码也能被乙的电影票号码整除。那么电影票共有 _____ 种不同的发放方式。

【考点】组合，数论，计数

【难度】☆☆☆

【答案】48

【分析】1 号学生有 29 人是其倍数，故 1 号学生只能拿 1 号电影票；

2 号学生有 14 人是其倍数，故 2 号学生只能拿 2 号电影票；

3 号学生有 9 人是其倍数，故 3 号学生只能拿 3 号电影票；

4 号学生有 6 人是其倍数，故 4 号学生只能拿 4 号电影票；

5 号学生有 5 人是其倍数，故 5 号学生只能拿 5 号电影票；

6 号学生有 4 人是其倍数，故 6 号学生只能拿 6 号电影票；

7 号学生有 3 人是其倍数，故 7 号学生只能拿 7 号电影票；

8 号学生必须是 2 号学生 (2) 的倍数，也必须是 4 号学生 (4) 的倍数，同时有 2 人是其倍数，

综上，8 号学生只能拿 8 号电影票；

9 号学生必须是 3 号学生 (3) 的倍数，还不能是 6，同时有 2 人是其倍数，综上，9 号学生只

能拿 9 号电影票；

10 号学生必须是 2 号学生 (2) 的倍数，也必须是 5 号学生 (5) 的倍数，同时有 2 人是其倍数，综上，10 号学生只能拿 10 号电影票；

12 号学生必须是 3 号学生 (3) 的倍数，也必须是 4 号学生 (4) 的倍数，同时有 1 人是其倍数，综上，12 号学生只能拿 12 号电影票；同时 24 号学生只能拿 24 号电影票；

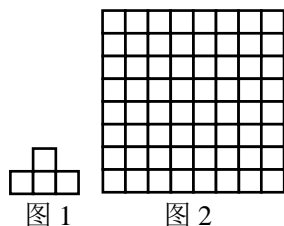
14 号学生必须是 2 号学生 (2) 的倍数，也必须是 7 号学生 (7) 的倍数，同时有 1 人是其倍数，综上，14 号学生只能拿 14 号电影票；同时 28 号学生只能拿 28 号电影票；

15 号学生必须是 3 号学生 (3) 的倍数，也必须是 5 号学生 (5) 的倍数，同时有 1 人是其倍数，综上，15 号学生只能拿 15 号电影票；同时 30 号学生只能拿 30 号电影票；

之后的数， $18=[2,9]$ ，18 必拿 18，同时是 9 的倍数的 27 号只能拿 27； $20=[4,5]$ ，20 必拿 20； $21=[3,7]$ ，21 必拿 21； $24=[3,8]$ ，24 必拿 24，同时是 8 的倍数的 16 号只能拿 16； $28=[4,7]$ ，28 必拿 28； $30=[5,6]$ ，30 必拿 30，同时是 5 的倍数的 25 号只能拿 25。

目前还没有确定的数有：11、22、13、26、17、19、23、29 号。11、22 互为一组成倍数，13、26 亦互为一组成倍数，有两种拿法：11 号拿 11，22 号拿 22，13 号拿 13，26 号拿 26；或 11 号拿 13，22 号拿 26，13 号拿 11，26 号拿 22。17、19、23、29 是大质数，没有限制，可随意拿，有 $A_4^4=24$ 种拿法。故共有 $2 \times 24=48$ 种拿法。

14. 图 2 的 8×8 表格中共含有 168 个如图 1 的“T”形。现对图 2 中的每个小方格染成黑色或白色；如果一个“T”形中黑白小方格各 2 个，则称这个“T”形为“和谐”的；那么对图 2 的各种染色方案，“和谐”的“T”形至多有_____个。



【考点】组合，染色问题，构造与论证

【难度】☆☆☆☆

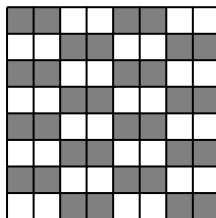
【答案】132

【分析】考察每一个“”形，枚举可知，其中的四个“”形最多只有 3 个“和谐”的（举

例：）。在一个 8×8 的方格阵中，共有 36 个“”形，故知必然至少有 36 个“”

形不是“和谐”的。即本题理论最大值为 $168-36=132$ 。

下面是一个 132 的例子：



15. 作答要求：

- (1) 请在答题卡第 15 题的万位+千位，填涂上你认为本试卷中一道最佳试题的题号；
如认为本试卷第 6 题出得最好，那么请在万位填涂“0”，千位填涂“6”。
- (2) 请在答题卡第 15 题的百位，填涂上你认为本试卷整体的难度级别；
最简单为“0”，最难为“9”，总计十个级别。
- (3) 请在答题卡第 15 题的十位+个位，填涂上你认为本试卷中一道最难试题的题号；
如认为本试卷第 14 题最难，那么请在十位填涂“1”，个位填涂“4”。