第十三届“走进美妙的数学花园”青少年展示交流活动
趣味数学解题技能展示大赛上海初赛
小学五年级试卷

2015 年 1 月 11 日　上午 10:30——12:00
满分 150 分

一、填空题（每小题 8 分，共 40 分）

【第 1 题】 $60.45\times 0.28-0.4030\times 37=$__________。
考点：小数计算
解析：

$$\begin{aligned}60.45\times 0.28-0.4030\times 37&=\left(0.403\times 150\right)\times 0.28-0.403\times 37\\&=0.403\times 42-0.403\times 37\\&=0.403\times\left(42-37\right)\\&=2.015\end{aligned}$$

【第 2 题】 7 个连续的自然数，每个数都是合数，这 7 个连续的自然数的和最小是__________。
考点：质数合数
解析：
100 以内的质数：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97。发现 89 到 97 之间刚好有 7 个连续的合数：90、91、92、93、94、95、96。所以这 7 个连续的自然数的和最小是 $90+91+92+93+94+95+96=93\times 7=651$。

【第 3 题】 有一筐苹果，第一次取出全部的一半多 2 个，第二次取出余下的一半少 3 个，筐中还剩 24 个，筐中原有苹果__________个。
考点：还原问题
解析：

（方法一）第一次取后还剩下 $\left(24-3\right)\times 2=42$（个），原来有 $\left(42+2\right)\times 2=88$（个）

（方法二）设原有苹果 x 个；$\left(\frac{x}{2}-2\right)\times\frac{1}{2}+3=24$；解得 $x=88$

【第 4 题】 牧场里，牧草每天均匀生长，牧场可供 10 只羊吃 20 天，或可供 14 只羊吃 12 天，那么牧场每天新长的草够 2 只羊吃__________天。

考点：牛吃草问题

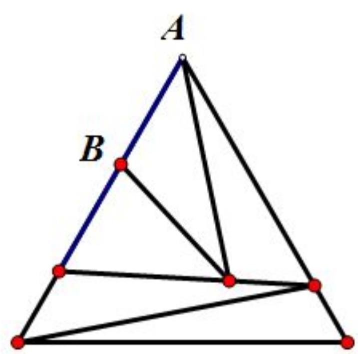
解析：

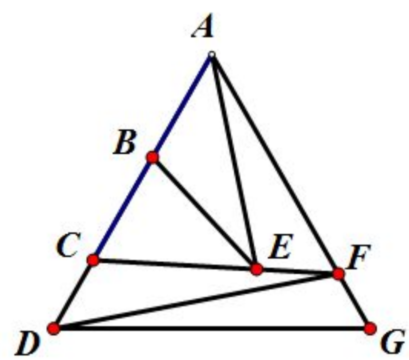
设一只羊一天吃草 1 份

则新草每天生长：$(10\times20-14\times12)\div(20-12)=4$（份）

所以牧场每天新长的草够 2 只羊吃 $4\div2=2$（天）

【第 5 题】 如图，一个边长为 24cm 的等边三角形被分成了面积相等的五块， $AB=$_________ cm 。





考点：等积变形

解析：

如图所示， $AC:CD=S_{\Delta ACF}:S_{\Delta CDF}=3:1$，所以 $AC=\dfrac{3}{4}AD$

又因为 $AB:BC=S_{\Delta ABE}:S_{\Delta BCE}=1:1$， 所以 $AB=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{3}{8}AD=\dfrac{3}{8}\times24=9(cm)$

二、填空题（每小题 10 分，共 50 分）

【第 6 题】甲乙两人相距 30 米面对面站好，两人玩“石头、剪子、布”，胜者向前走 3 米，负者向后退 2 米，平局两人各向前走 1 米，玩了 15 局后，甲距出发点 17 米，乙距出发点 2 米，甲胜了________次。

考点：逻辑推理、鸡兔同笼

解析：

（方法一）有胜有负的局，两人距离缩短 1 米；平局两人距离缩短 2 米。15 局后两人之间的距离缩短会在 15 至 30 米之间。

（1）如果两人最后都是后退，两人之间的距离不会缩短只会变大，与上面分析矛盾。

（2）如果两人最后是“一人前进，另一人后退”。两人距离会缩短 $17-2=15$ 米。但如果两人距离缩短 15 米，只能是 15 局都是“胜负局”。

假设甲 15 局都是胜者，他会前进 45 米，每把一次“胜者”换成一次“负者”，他会少前进 5 米．45 减去多少个 5 都不可能等于 17。这种情况不成立。

（4）如果两人最后是都向前进，两人的距离缩短 $17+2=19$ 米。假设 15 局都是“胜负局”，两人之间距离缩短 15 米，每把一局“胜负局”换成平局，两人之间距离多缩短 1 米。由“鸡兔同笼”可求得，“胜负局”

有 11 局，平局有 4 局。
4 局平局中甲前进了 4 米。假设甲其余 11 局都是胜者，他一共前进$33+4=37$米。每把一局胜局改为负局，他会后退 5 米，改 4 局即可满足题意，他一共前进$37-5\times4=17$米。
所以，甲 7 胜 4 平 4 败。

（方法二）设甲胜了 x 局，负了 y 局，平了 z 局（其中 x、y、z 为自然数）。
由题意得

$$\begin{cases}x+y+z=15\\3x-2y+z=17\\3y-2x+z=2\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x+y+z=15\\3x-2y+z=17\\2x-(3y+z)=2\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x+y+z=15\\2y-(3x+z)=17\\3y-2x+z=2\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x+y+z=15\\2y-(3x+z)=17\\2x-(3y+z)=2\end{cases}$$

解之得$\begin{cases}x=7\\y=4\\z=4\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=\dfrac{47}{5}\\y=\dfrac{28}{5}\\z=0\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=\dfrac{103}{5}\\y=\dfrac{122}{5}\\z=-30\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=23\\y=26\\z=-34\end{cases}$

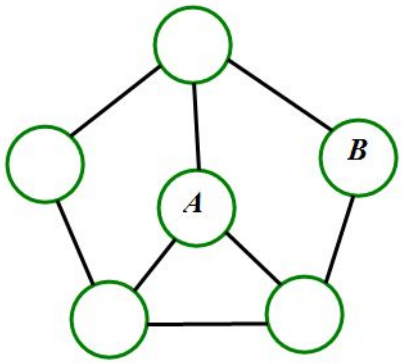
所以甲 7 胜 4 平 4 败。

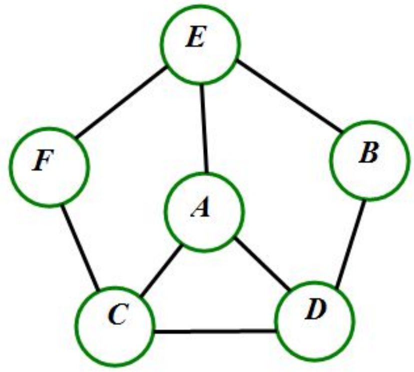
【第 7 题】80 名学生面向老师站成一行，按老师口令从左至右顺序报数：1、2、3……，报完后，老师让所报的数是 2 的倍数的同学向后转，接着又让所有报的数是 4 的倍数的同学向后转，接着报 8 的倍数向后转，……报 64 的倍数向后转，现在背向老师的同学有____名。
考点：容斥原理、约数倍数
解析：
最开始学生面向老师，要求背向老师的学生，即求转过奇数次的学生人数。

$\left[\dfrac{80}{2}\right]=40$人，$\left[\dfrac{80}{4}\right]=20$人，$\left[\dfrac{80}{8}\right]=10$人，$\left[\dfrac{80}{16}\right]=5$人，$\left[\dfrac{80}{32}\right]=2$人，$\left[\dfrac{80}{64}\right]=1$人。

（64, 32, 16, 8, 4, 2 依次是 2 的 6, 5, 4, 3, 2, 1 次方）则转过 6 次的学生有 1 人，只转过 5 次的学生有$2-1=1$人，只转过 4 次的学生有$5-2=3$人，只转过 3 次的学生有$10-5=5$人，只转过 2 次的学生有$20-10=10$人，只转过 1 次的学生有$40-20=20$人。
所以转过奇数次的学生有$1+5+20=26$人。

【第 8 题】右图是一个棋盘，开始时，警察在位置 A，小偷在位置 B，双方交替走棋，警察先走，每次必须沿着线走一步，那么，警察至少需要走____步才能保证抓住小偷。





考点：逻辑推理、最短路径

解析：

第一步警察由 A 走到 C，小偷只能由 B 走到 E；
第二步警察由 C 走到 D，小偷只能由 E 走到 F；
第三步警察由 D 走到 A，小偷只能由 F 到 C 或者 F 到 E；
小偷无论往哪个方向走,警察走第四步都可以抓住小偷。
所以警察至少需要走 4 步才能保证抓住小偷。

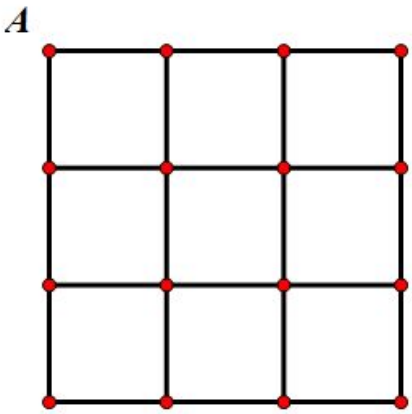
【第 9 题】九个美女，有些是总是待人诚恳说真话的天使，其余的是总是花言巧语说假话的魔鬼，第一个美女说：“我们中恰有 1 个魔鬼”；第二个美女说：“我们中恰有 2 个天使”；第三个美女说：“我们中恰有 3 个魔鬼”；第四个美女说：“我们中恰有 4 个天使”；第五个美女说：“我们中恰有 5 个魔鬼”；第六个美女说：“我们中恰有 6 个天使”；第七个美女说：“我们中恰有 7 个魔鬼”；第八个美女说：“我们中恰有 8 个天使”；第九个美女说：“我们中恰有 9 个魔鬼”；这些美女中恰有_______个天使。

考点：逻辑推理

解析：

“我们中恰有 1 个魔鬼”、“我们中恰有 3 个魔鬼”、“我们中恰有 5 个魔鬼”、“我们中恰有 7 个魔鬼”、“我们中恰有 9 个魔鬼”这 5 句话中最多有 1 句是真话；同理，“我们中恰有 2 个天使”、“我们中恰有 4 个天使”、“我们中恰有 6 个天使”、“我们中恰有 8 个天使”这 5 句话中最多有 1 句是真话，所以最多有 2 个天使。所以天使的数量为 1 个或者 2 个。
假设恰有 1 个天使，则意味着有 8 个魔鬼。此时我们可以判断出 9 个美女说的话都为假话，矛盾。
假设恰有 2 个天使，则意味着有 7 个魔鬼。此时我们可以发现第二个美女和第七个美女说的是真话，其他人说的是假话，成立。
所以这些美女中恰有 2 个天使。

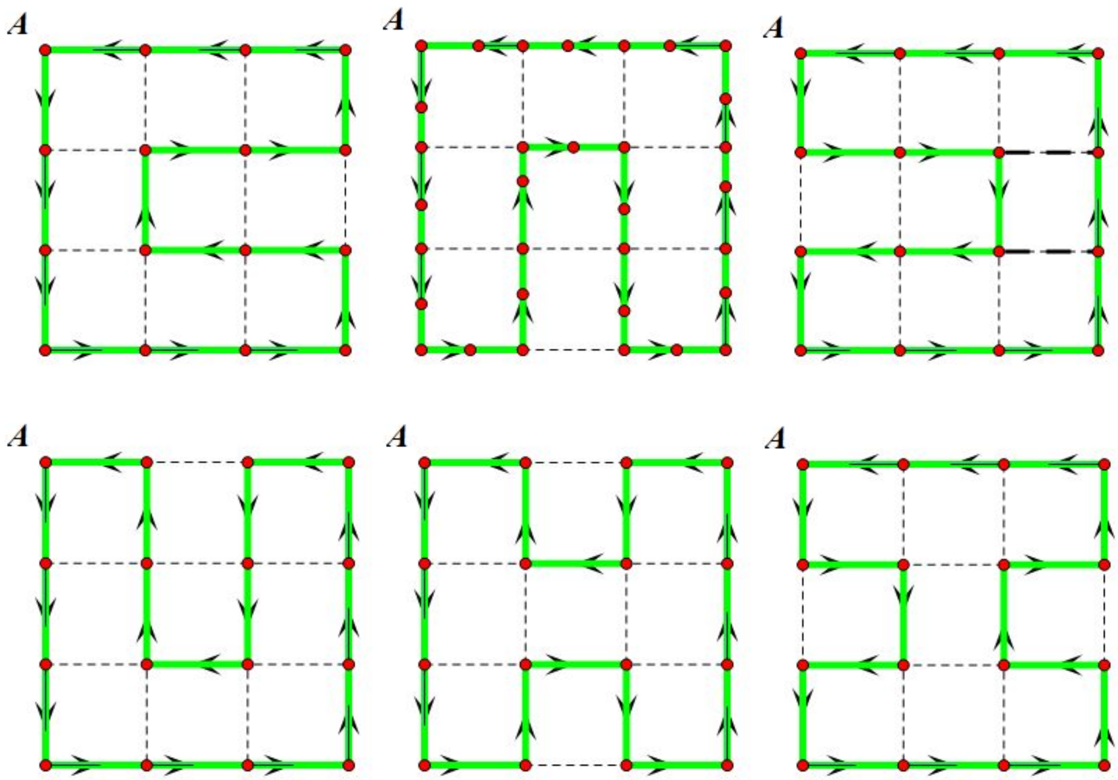
【第 10 题】如图，3×3 的表哥中有 16 个小黑点，一个微型机器人从 A 点出发，沿格线运动，经过其他每个黑点恰好一次，再回到 A 点，共有_________种不同的走法。



考点：加乘原理

解析：

从 A 点出发有 2 个方向，向下或者向右，而图又是一个正方形，根据对称性可知，向下的走法和向右的走法一样多。因此我们可以只看一个方向即可，下面就找一下第一步向下的走法。



第一步向下走有 6 种，则第一步向右走也有 6 种，所以共有 12 种不同的走法。

三、填空题（每小题 12 分，共 60 分）

【第 11 题】8 个互不相同的非零自然数从小到大排成一排，前 3 个数的平均数为 9，8 个数的平均数为 19，后 3 个数的平均数为 29，那么第二大的数与第二小的数的差最大是__________。

考点：平均数

解析：

设这 8 个互不相同的非零自然数为 a，b，c，d，e，f，g，h，

且有 $0<a<b<c<d<e<f<g<h$

由题意可知 $a+b+c=27$，$f+g+h=87$，所以 $d+e=19\times8-27-87=38$

要保证 g 和 b 的差最大，则要 g 越大越好，b 越小越好。

要使得 b 越小，则需要 c 越大。而 $c<d$，d 最大取到 18（因为 $d+e=38=18+20$），所以 c 最大为 17。所以 $a+b=27-c=10=4+6$，a 最大取 4，所以 b 最小取 6。

要使得 g 越大，则需要 f 越小。而 $e<f$，e 最小取到 20（因为 $d+e=38=18+20$），所以 f 最小为 21。

所以 $g+h=87-f=66=32+34$，h 最小取 34，所以 g 最大取 32。

所以第二大的数与第二小的数的差最大是 $g-b=32-6=26$。

【第 12 题】甲、乙两人轮流从 1~17 这 17 个数中标记数，规定：不能标记已标记的数；不能标记已标记数的 2 倍；不能标记已标记数的 $\frac{1}{2}$；谁没有数可标记谁就输。现在甲先标记了 8，乙要保证自己必胜，乙接着应该标记_________。

考点：策略问题

解析：

根据“不能标记已标记数的 2 倍；不能标记已标记数的 $\frac{1}{2}$”这个条件我们可以把 1~17 分为以下四类：

五个元素	（16，8，4，2，1）
三个元素	（12，6，3）
两个元素	（14，7）；（10，5）
一个元素	（17）；（15）；（13）；（11）；（9）

由上表可知，甲标记了 8 以后，16 和 4 就不能再标记了。这时，乙的可选择对象就变为了：

三个元素	（12，6，3）
两个元素	（14，7）；（10，5）；（2，1）
一个元素	（17）；（15）；（13）；（11）；（9）

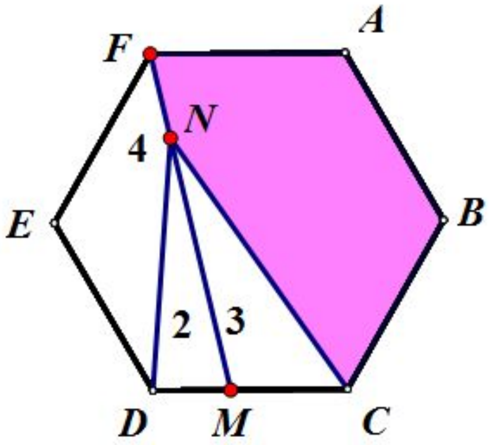
接下来，乙要想获胜，应该尽量选择对其他数限制比较多的数，所以，若乙在三个元素（12，6，3）中选择了 6 之后，甲的可选择对象就变为了：

两个元素	（14，7）；（10，5）；（2，1）
一个元素	（17）；（15）；（13）；（11）；（9）

此时剩下的 8 组数中，不管甲选择哪个，选择到最后一组的都是乙。

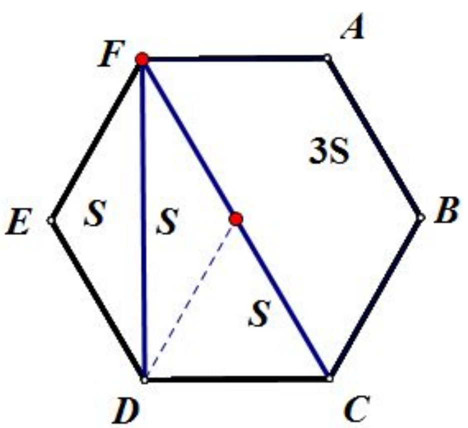
所以乙应该标记 6。

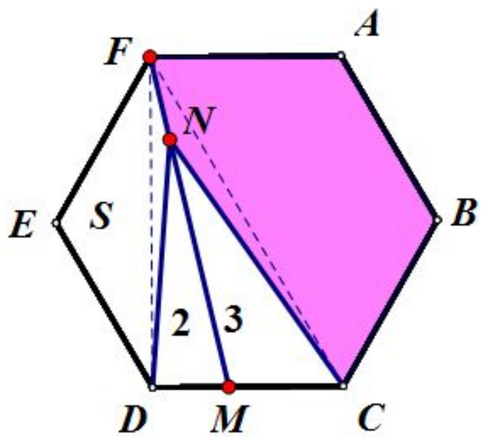
【第 13 题】如图，三条线段将正六边形分成了四块，已知其中三块的面积分别是 2、3、4 平方厘米，那么第四块（图中阴影部分）的面积是______平方厘米。



考点：等积变形

解析：





先对正六边形做一个分析。如左图所示，一个正六边形的面积可以表示为$6S$，很容易发现则三角形DEF的面积为S，三角形CDF的面积为$2S$。

如右图所示，连结DF、CF。设正六边形$ABCDEF$的面积为$6S$，则三角形DEF的面积为S，三角形CDF的面积为$2S$

因为$S_{\Delta FDM}:S_{\Delta FCM}=DM:CM=2:3$

所以$S_{\Delta FDM}=\frac{2}{5}S_{\Delta FCD}=\frac{2}{5}\times 2S=\frac{4}{5}S$

所以$S_{四FEDM}=S_{\Delta FED}+S_{\Delta FDM}=S_{四FEDN}+S_{\Delta NDM}$

即$S+\frac{4}{5}S=4+2$，解得$S=\frac{10}{3}$

所以$S_{ABCDEF}=6S=20\left(cm^2\right)$

所以$S_{阴影}=20-2-3-4=11\left(cm^2\right)$

【第 14 题】从 1~9 中选出 5 个数字，组成 1 个五位数，要求这个五位数能被选中的 5 个数字的任何一个数字整除，却不能够被未选中的 4 个数字的任何一个数字整除，那么，这个五位数的最小值是________。

考点：数的整除

解析：

（1）任何五位数都能被 1 整除，所以必有 1。

（2）如果这个五位数包含 5，则 5 只能放在末位。5 在末位，这个五位数是个奇数，则一定不能被 2、4、6、8 整除，所以这个五位数的五个数字只能是 1、3、5、7、9。而 1、3、5、7、9 组成的五位数的数字和为 25，不能被 3 整除。所以不能含 5。

（3）如果 2、3 同时出现在这个五位数中，则这个五位数能被 2、3 整除，所以这个五位数也能被 6 整除，所以也要包含 6，所以目前有了四个数字：1，2，3，6；此时四个数的数字之和是 12，要保证这个数能被 3 整除，最后一个数字也是 3 的倍数，只能选 9。而 1、2、3、6、9 的数字之和为 21，不能被 9 整除，不成立，所以 2、3 不能同时出现在这个五位数中。

（4）如果这个五位数没有 2，那么这个五位数不能被 2 整除，那么这个数也不能有 4、6、8。那五个数字只能是 1、3、5、7、9。这个组合在第 2 条已经被排除了，所以这个五位数有 2 而不含 3。

（5）既然不含 3，那么这个五位数不能被 3 整除，那也就不含 6、9。所以这个五位数不含 3、6、9、5，那么这个五位数只能是 1、2、4、7、8 五个数字组成的。

题目求最小值，因此我们可以用试除法。这个五位数能被 2 整除，所以是个偶数。1、2、4、7、8 组成的五位偶数从小到大依次为 12478，12748，12784，12874，14278，14728......

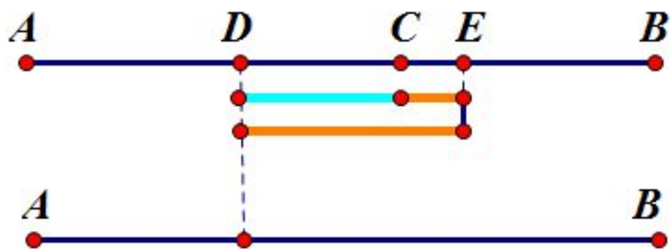
12478 不能被 4 整除，12748 不能被 8 整除，12784 不能被 7 整除，12874 不能被 4 整除，14278 不能被 4 整除，经检验，14728 满足题意。

所以这个五位数的最小值是 14728。

【第 15 题】军军从 A 出发匀速去 B，军军出发时阿平从 B 出发匀速去 A，他们在途中 C 相遇，相遇后军军又走了 100 米时掉头去追阿平，追上阿平时距 C 地 360 米；军军追上阿平时立即掉头去 B，结果当军军到 B 时阿平也恰好到 A。A、B 距离为多少米？

考点：比例行程

解析：



如图所示，C 为军军和阿平的第一次相遇地点。

军军从 C 点走了 100 米到达了 E 点，之后调头在距离 C 地 360 米处的 D 点追上阿平。

阿平走 CD 段与军军走 CE+ED 段所用的时间相同。

所以 $v_{军}:v_{平}=CD:(CE+ED)=360+(100+100+360)=9:14$

第一次相遇，军军走 AC 段与阿平走 BC 段所用的时间相同，所以两人的路程比为 $AC:BC=14:9$

设 AB 全程为 $14+9=23$（份），则 $AC=14$（份）

而第二次追上后，军军调头走 DB 段与阿平走 DA 段所用的时间相同，所以 $AD:BD=9:14$，所以 $AD=9$（份）

所以 $DC=14-9=5$（份）

所以 $AB=360\div5\times23=1656$（米）