第十三届“走进美妙的数学花园”青少年展示交流活动

趣味数学解题技能展示大赛上海初赛

小学四年级试卷

2015年1月11日 上午8:00－9:30
满分150分

注意事项
1.考生要按要求在密封线内填好考生的有关信息。
2.不允许使用计算器。
3.为方便决赛通知，务必填写联系电话。

一、填空题（每小题8分，共40分）

【第1题】
如果$10+9+8\times7\div\square+6-5\times4-3\times2=1$，那么$\square=$ ________ 。
【分析与解】

$$10+9+8\times7\div\square+6-5\times4-3\times2=1$$
$$8\times7\div\square=1+3\times2+5\times4-6-9-10$$
$$56\div\square=2$$
$$\square=28$$

【第2题】
a、b、c都是质数，并且$a+b=49$，$b+c=60$，则$c=$ ________ 。
【分析与解】
如果两个质数相加等于49，49是奇数;
则两个质数为一奇一偶;
所以其中偶数必是2，另一个奇数是$49-2=47$。

(1)当$\begin{cases}a=2\\b=47\end{cases}$时，$c=60-b=60-47=13$是质数，符合题意;

(2)当$\begin{cases}a=47\\b=2\end{cases}$时，$c=60-b=60-2=48$是合数，不符题意;

综上所述，$a=2$，$b=47$，$c=13$。

【第 3 题】

去掉 20.15 中的小数点，得到的整数比原来的数增加了 ________ 倍。

【分析与解】

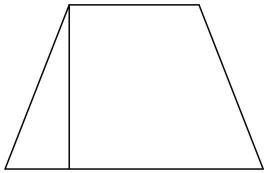
去掉 20.15 中的小数点，得到的整数为 2015；

2015 是 20.15 的 100 倍;

2015 比 20.15 增加了 $100-1=99$ 倍。

【第 4 题】

梯形的上底、高、下底依次构成一个等差数列，其中高是 12 。那么梯形的面积是 ________ 。



【分析与解】

因为梯形的上底、高、下底依次构成一个等差数列;

所以 $上底+下底=高\times 2=12\times 2=24$；

$梯形的面积=(上底+下底)\times 高\div 2=24\times 12\div 2=144$。

【第 5 题】

两个小胖子一样重，他们决定一起减肥。三个月后大胖减掉 12 千克，二胖减掉 7 千克。这时大胖的体重比二胖的体重的 2 倍少 80 千克。原来他们各重 ________ 千克。

【分析与解】

（方法一）

如果二胖减掉 7 千克，但大胖增加 $80-12=68$ 千克;

那么大胖的体重是二胖的 2 倍;

此时，二胖的体重为 $(68+7)\div(2-1)=75$ 千克;

原来二胖的体重为 $75+7=82$ 千克;

即大胖、二胖原来各重 82 千克。

（方法二）

设大胖、二胖原来各重 x 千克;

$x-12=2(x-7)-80$；

解得 $x=82$；

大胖、二胖原来各重 82 千克。

二、填空题（每小题10分，共50分）

【第 6 题】

有两组数，第一组 7 个数的和是84，第二组的平均数是21，两组中的所有数的平均数是18，则第二组有 ________ 个数。

【分析与解】

（方法一）

设第二组有 x 个数;

$84+21x=18(7+x)$;

解得 $x=14$;

第二组有14个数。

（方法二）

第一组的平均数是 $84\div7=12$;

十字交叉法:

第一组　　　　第二组

12　　　　　　21

╲　　╱

18　;

╱　　╲

3　　　　　　6

1　　　　　　2

第一组与第二组的个数之比为 $1:2$;

第二组有 $7\div1\times2=14$ 个数。

【第 7 题】

植树节四⑴班的同学去公园植树，在120米长的路两边每隔3米挖了一个坑，后来因间距太小改成每隔5米挖一个坑。这样最多有 ________ 个坑可以保留。

【分析与解】

如果距离起点的距离既是3的倍数，又是5的倍数，那么这个坑就可以保留;

$[3,5]=15$ 米;

$120\div15=8$ 段;

根据“直线型两头都种植树问题”，棵树 $=$ 段数 $+1$;

且路的两旁都有挖坑;

最多有 $(8+1)\times2=18$ 个坑可以保留。

【第 8 题】

A，B，C，D 四人进行围棋比赛，每人都要与其他三人各赛一场。比赛是在两张棋盘上同时进行，每天每人只赛一盘。第一天 A 与 C 比赛，第二天 C 与 D 比赛，第三天 A 与 ________ 比赛。

【分析与解】

因为第一天 C 与 A 比赛，第二天 C 与 D 比赛;

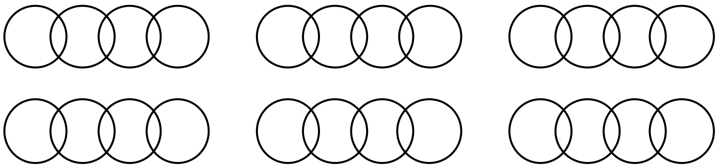
又因为每人都要与其他三人各赛一场;

所以第三天 C 与 B 比赛;

所以第三天 A 与 D 比赛。

【第 9 题】

有六条铁链，每条有四个环（如图）。打开一个环要用1分钟，封闭一个打开的环要用3分钟。现在要把这24个环练成一条铁链，至少要用 ________ 分钟。



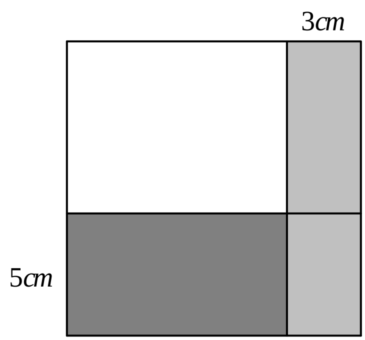
【分析与解】

打开一条铁链的 4 个环，用这 4 个环将其余五条铁链连在一起;

至少要 $(1+3)\times 4=16$ 分钟。

【第 10 题】

一块正放形的钢板，先截去一个宽 3 厘米的长方形，又截去一个宽 5 厘米的长方形（如图），面积比原来的正方形减少 81 平方厘米，原正方形的面积是 ________ 平方厘米。



【分析与解】

（方法一）

设原正方形的边长为 x 厘米;

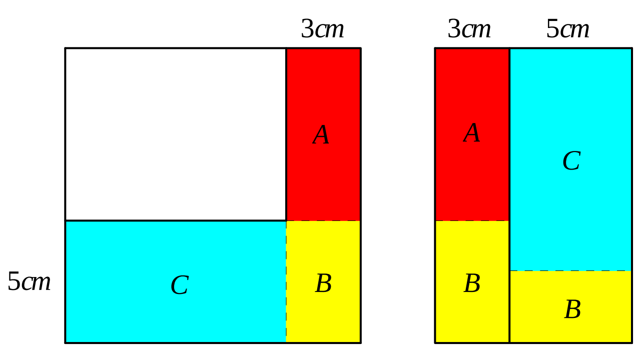
$x^2-(x-3)(x-5)=81$;

解得 $x=12$;

原正方形的边长为 12 厘米;

原正方形的边长为 $12^2=144$ 平方厘米。

（方法二）



B 的面积为 $3\times5=15$ 平方厘米;

原正方形的边长为 $(81+15)\div(3+5)=12$ 厘米;

原正方形的边长为 $12^2=144$ 平方厘米。

三、填空题（每小题12分，共60分）

【第 11 题】

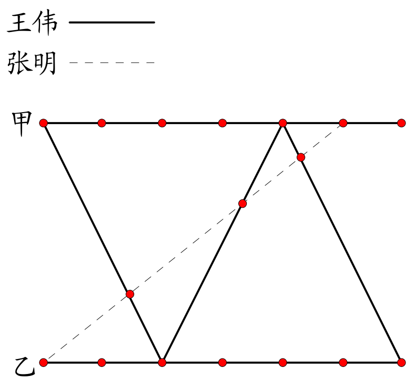
王伟从甲地走向乙地，同时张明骑自行车由乙地到甲地，半小时后两人在途中相遇，张明到达甲地后，马上返回乙地，在第一次相遇后20分钟又追上王伟。张明到乙地后又折回，两人在第二次相遇后的________分钟第三次相遇。

【分析与解】

从出发到第一次迎面相遇，两人一共走了1个全程，用时30分钟;

从出发到第二次迎面相遇（第三次相遇），两人一共走了3个全程，用时$30\times3=90$分钟;

两人在第二次相遇后的$90-30-20=40$分钟第三次相遇。



【第 12 题】

这是一种两人玩的游戏。两位选手轮流在一条20×1的矩形长带上移动筹码。每一轮都可将四个筹码的任意一个向右移动任意方格。但不能放在其他筹码上面或超过其他筹码。开始时如图中看到的各筹码位置，赢家是最后移动筹码者。（他移动后，四个筹码恰好占据了长带右端的四个放个，不可能在移动了）。先移动者应将________向右移动________格，才能保证获胜。

	A					B							C			D			

【分析与解】

																A	B	C	D

因为最终获胜状态中的四个筹码是关于筹码B与筹码C的分界线对称分布的;

所以我们可采用对称的策略让四个筹码在移动过程中出现间隔数（A与B，C与D）始终处于对称形式;

即A与B的间隔数等于C与D的间隔数。

获胜策略①：先移动者应将A向右移动2格，这时对手不管怎么移，间隔数都不等，

接下来轮到先手，只要保证间隔数相等。

获胜策略②：先移动者应将D向右移动2格，后面同获胜策略①。

【第 13 题】

一个 $n+3$ 位正整数 $144\cdots430$（n 个 4），是 2015 的倍数，正整数 n 最小是________。

【分析与解】

2015 分解质因数： $2015=5\times13\times31$；

而 $1\underbrace{44\cdots4}_{n个4}30$ 可以拆成： $1\underbrace{44\cdots4}_{n个4}30=2\times5\times13\times\underbrace{11\cdots1}_{n+1个1}$；

若 $1\underbrace{44\cdots4}_{n个4}30$ 是 2015 的倍数；

则只要满足 $\underbrace{11\cdots1}_{n+1个1}$ 是 31 的倍数；

```
          3 5 8 4 2 2 9 3 9 0 6 8 1
     ______________________________
31 ) 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
       9 3
     -----
       1 8 1
       1 5 5
       -----
         2 6 1
         2 4 8
         -----
           1 3 1
           1 2 4
           -----
               7 1
               6 2
               ---
                 9 1
                 6 2
                 ---
                 2 9 1
                 2 7 9
                 -----
                   1 2 1
                     9 3
                   -----
                     2 8 1
                     2 7 9
                     -----
                         2 1 1
                         1 8 6
                         -----
                           2 5 1
                           2 4 8
                           -----
                               3 1
                               3 1
                               ---
                                 0
```

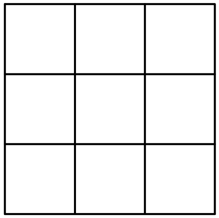
$\underbrace{11\cdots1}_{15个1}\div31=3584229390681$；

即当 $n+1$ 最小是 15 时，$\underbrace{11\cdots1}_{n+1个1}$ 是 31 的倍数；

所以 n 最小是 $15-1=14$。

【第 14 题】

图中的3×3表格已经固定，现将 4 枚相同的棋子放入格子中，每个格子最多放一枚，如果要求每行，每列都有棋子，那么共有 ________ 种不同方法。



【分析与解】

（方法一）

$4\div3=1\cdots\cdots1$，$1+1=2$；

必有一行有 2 枚;

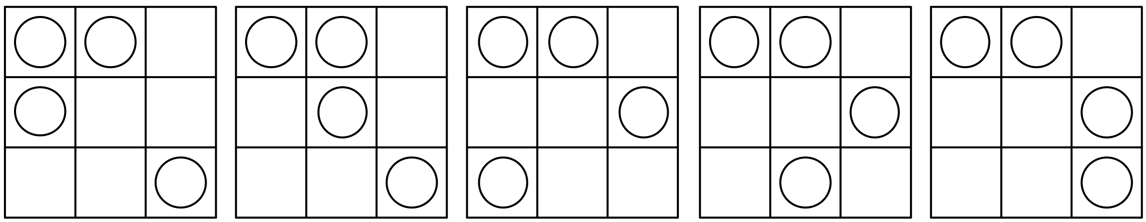
有 2 枚硬币的一行有 3 种选择;

不防先考虑有 2 枚硬币的一行是最上面一行;

同一行的 2 枚硬币有 $C_3^2=\dfrac{3\times2}{2\times1}=3$ 种选择;

不防考虑第一行，第一、二列各有一枚硬币;

考虑余下 3 枚硬币，通过枚举有 5 种选择;



共有 $3\times3\times5=45$ 种不同方法。

（方法二）

从 3×3 表格中任选 4 个格子放硬币，有 $C_9^4=126$ 种;

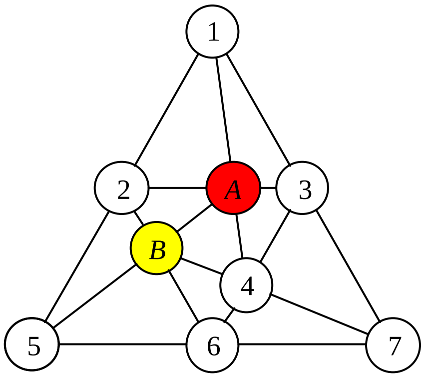
其中要去掉从 2×3 表格中任选 4 个格子放硬币，有 $C_6^4\times(3+3)=15\times6=90$ 种;

但是重复去掉了从 2×2 表格中任选 4 个格子放硬币，有 $C_4^4\times(3\times3)=1\times9=9$ 种;

根据容斥原理，有 $126-90+9=45$ 种不同方法。

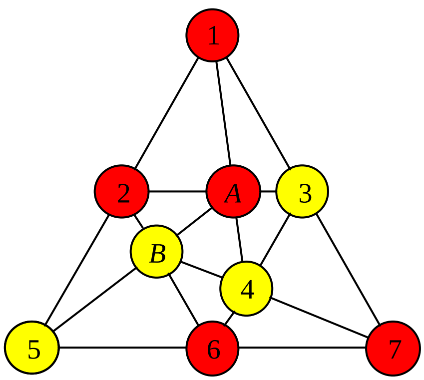
【第 15 题】

图中的 9 个圆圈间，连有 9 条直线，每条直线有 3 个圆圈。甲先乙后轮流将 9 个圆圈涂上颜色；如果谁先将某条直线上的 3 个圆圈全涂上自己的颜色，谁就获胜；和局判乙胜。现在，甲先选择了“ A ”，乙接着选择了“ B ”。甲要取胜，接下来的一步应填在标号为 ______________ 的方格中（有几种就填几种）。



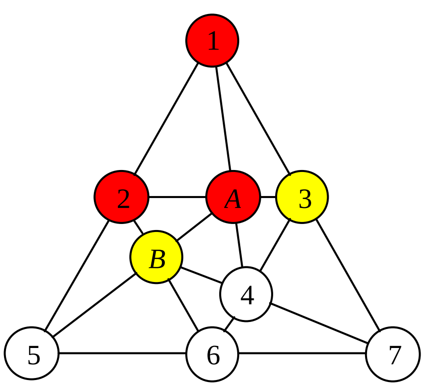
【分析与解】

(1)若甲选择1，则乙必选择4，甲必选择7，乙必选择3，甲必选择6，乙必选择5，甲必选择2；和局乙胜。

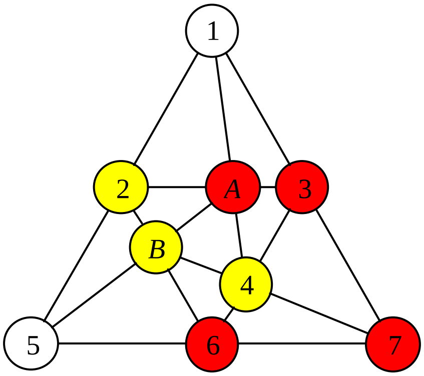


(2)若甲选择2，则乙必选择3，

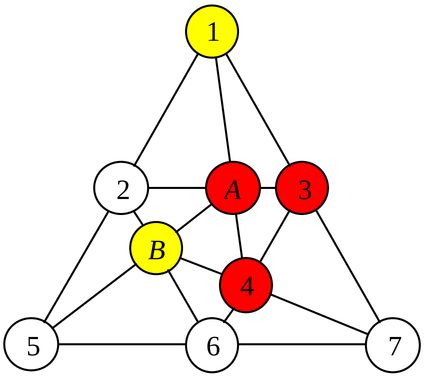
若甲选择1，无论乙选择几，甲再在下一步选择4或5中的一个；甲胜。



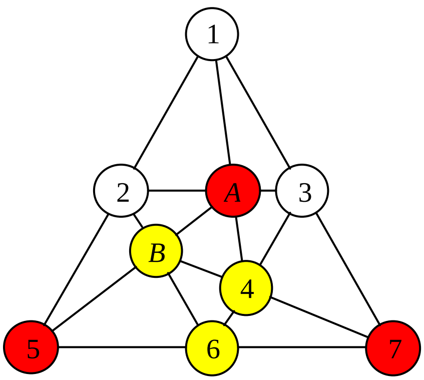
(3)若甲选择3，则乙必选择2，甲必选择6，乙必选择4，甲必选择7；
无论乙选择几，甲再在下一步选择1或5中的一个；甲胜。



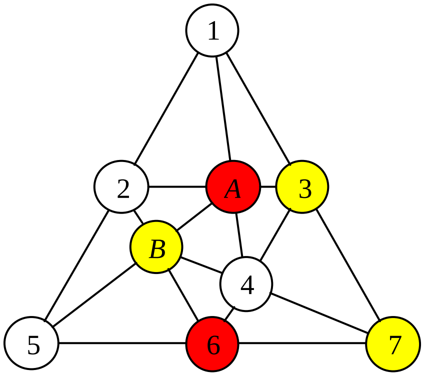
(4)若甲选择4，则乙必选择1，
若甲选择3；无论乙选择几，甲再在下一步选择2或6中的一个；甲胜。



(5)若甲选择5，乙选择4，则甲必选择7，
若乙选择6，无论甲选择几，乙在下一步选择2或3中的一个；乙胜。

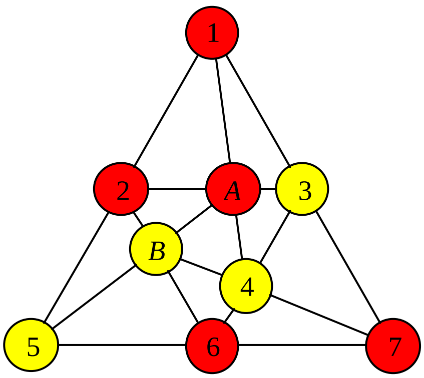


⑹若甲选择6，通过尝试发现乙只能选择3；



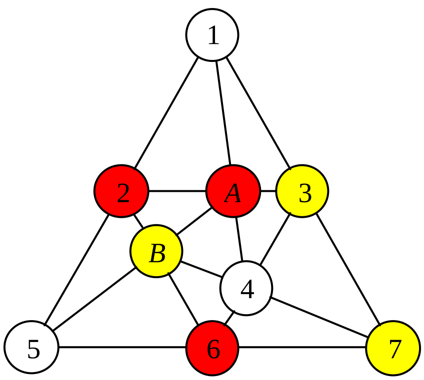
①若甲选择6，乙选择3，甲选择1，

则乙必选择4，甲必选择7，乙必选择5，甲必选择2；和局乙胜。



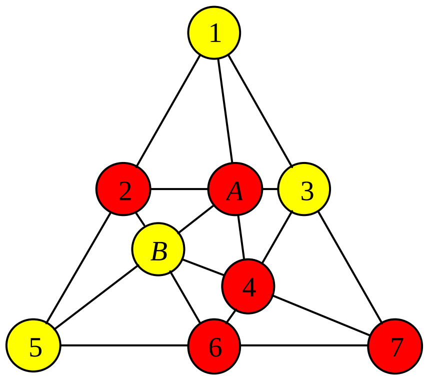
②若甲选择6，乙选择3，甲选择2，

乙选择7，无论甲选择几，乙在下一步选择1或4中的一个；乙胜。



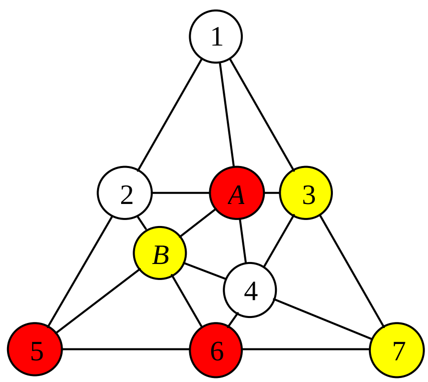
③若甲选择6， 乙选择3， 甲选择4，

则乙必选择1， 甲必选择7， 乙必选择5， 甲必选择2； 和局乙胜。



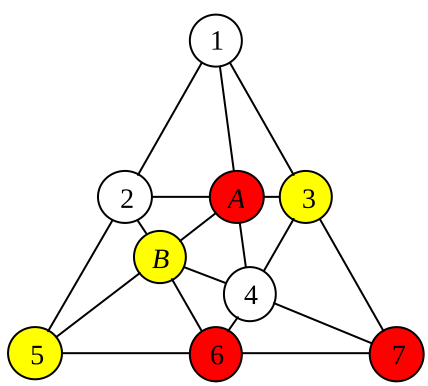
④若甲选择6， 乙选择3， 甲选择5，

则乙必选择7， 无论甲选择几， 乙在下一步选择1或4中的一个； 乙胜。

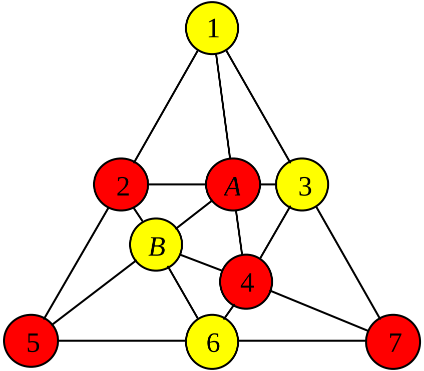


⑤若甲选择6， 乙选择3， 甲选择7， 则乙必选择5，

无论甲选择几， 乙在下一步选择1或4中的一个； 乙胜或平均乙胜。



(7)若甲选择 7，乙选择 6，甲必选择 2，乙必选择 3，甲必选择 4，乙必选择 1，甲必选择 5；和局乙胜。



综上所述，甲要取胜，接下来的一步应填在标号为 2、3、4 的方格中。