第十五届“中环杯”小学生思维能力训练活动
五年级选拔赛

得分：__________

填空题：

1、已知 $\frac{2+4+6+8}{1+3+5+7}-\frac{1+3+5+7}{2+4+6+8}=\frac{m}{n}$，其中 **m, n** 是两个互质的正整数，则 $10m+n=$____

【考点】分数计算

【答案】110

分析：原式 $=\frac{20}{16}-\frac{16}{20}=\frac{9}{20}$，$10m+n=10\times9+20=110$

2、D 老师家里有五个烟囱，这五个烟囱正好从矮到高排成一排，相邻两个烟囱之间的高度差为 2 厘米，其中最高的烟囱又正好等于最矮的两个烟囱的高度之和，则五个烟囱的高度之和是________厘米

【考点】等差数列，方程

【答案】50

分析：设这五个烟囱分别为 x-4，x-2，x，x+2，x+4，则 x+4=x-2+x-4，x=10，和为 5x=50

3、已知 $2014=\left(a^2+b^2\right)\times\left(c^3-d^3\right)$，其中 **a**、**b**、**c**、**d** 是四个正整数，请你写出满足条件的一个乘法算式：___________

【考点】数的拆分，分解质因数

【答案】答案不唯一

分析：2014=1×2014=2×1007=19×106=38×53

其中一解为 $2014=\left(5^2+9^2\right)\times\left(3^3-2^3\right)$

4、一个长方体的长、宽分别为 **20** 厘米、**15** 厘米，其体积的数值与表面积的数值相等，则它的高为______厘米（答案写为假分数）

【考点】立体几何，方程

【答案】$\frac{60}{23}$

分析：设高为 h，则 20×15×h=（20×15+20h+15h）×2，则 h=$\frac{60}{23}$

5、一次中环杯比赛，满分为 **100** 分，参赛学生中，最高分为 **83** 分，最低分为 **30** 分（所有的分数都是整数），一共有 **8000** 个学生参加，那么至少有_____个学生的分数相同

【考点】抽屉原理

【答案】149

分析：83-30+1=54，$8000\div54=148\cdots8$，148+1=149 个

6、对 **35** 个蛋黄月饼进行打包，一共有两种打包规格：大包袋里每包有 **9** 个月饼，小包装里每包有 **4** 个月饼。要求不能剩下月饼，那么一共打了______个包

【考点】不定方程

【答案】5

分析：设大包有 x 袋，小包有 y 袋，（x,y 均为整数）所以 9x+4y=35，易得 $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$，

所以一共打了 2+3=5 个包

7、小明和小红在 600 米的环形跑道上跑步，两人从同一起点同时出发，朝相反方向跑，第一次和第二次相遇时间间隔 50 秒，已知小红的速度比小明慢 2 米/秒，则小明的速度为______米/秒

【考点】环形跑道，方程/和差公式

【答案】7

分析:

法一：设小红的速度为 x 米/秒，小明的速度为 x+2 米/秒，两次相遇之间合跑一个全程，则 50（x+x+2）=600，x=5，则小明的速度为 5+2=7 米/秒

法二：两次相遇之间合跑一个全程，则两人速度和为 600÷50=12，两人速度差为 2 米/秒，则小明（快）的速度为（12+2）÷2=7 米/秒

8、我们知道，2013、2014、2015 的因数个数相同，那么具有这样性质（因数的个数相同）的三个连续自然数 n、$n+1$、n+2 中，n 的最小值为_____

【考点】分解质因数，约数个数

【答案】33

分析： 三个连续的数不可能都为质数，要使它们的因数个数一样，需要做到：

①其中没有质数（否则个数不可能相等）；

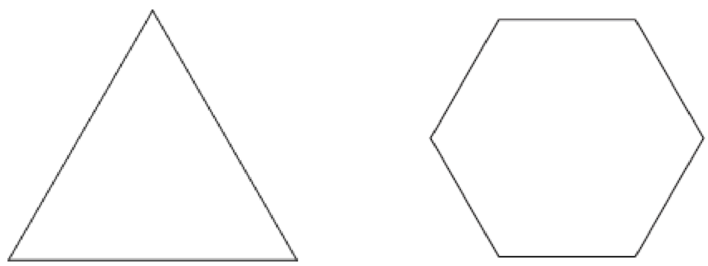
②三个数中不能有完全平方数（否则个数有奇有偶不可能相等）。

最值问题从极端情况出发，从小往大，把质数和完全平方数划去，如下所示：

1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、21、22、23、24、25、26、27、28、29、30、31、32、33、34、35、36、37……

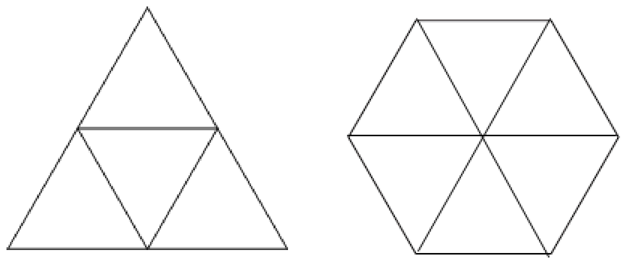
经试验，33、34、35 各有 4 个约数，n 最小为 33

9、图中的正三角形与正六边形的周长相等，已知正三角形的面积是$10cm^2$，则正六边形的面积为_____cm^2



【考点】图形切拼

【答案】15



分析： 设正六边形每个边长为 a，则正三角形每个边长为 2a，分割后每个小三角形的面积相同，10÷4×6=15cm^2

10、甲、乙、丙在猜一个两位数

甲说：它的因数个数为偶数，而且它比 **50** 大

乙说：它是奇数，而且它比 **60** 大

丙说：它是偶数，而且它比 **70** 大

如果他们三个人每个人都只说对了一半，那么这个数是_______

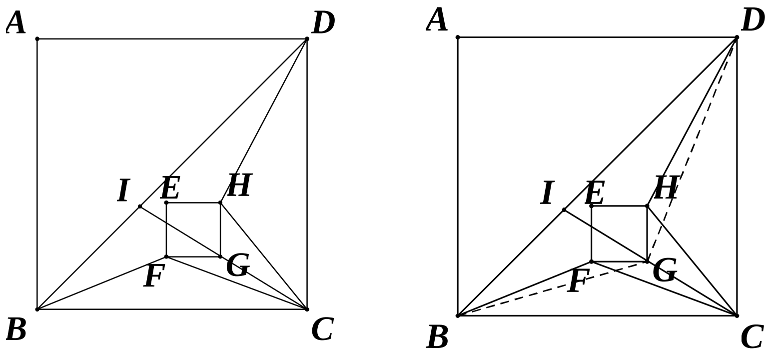
【考点】逻辑推理

【答案】**64**

分析：由乙、丙所说一个为奇数一个为偶数，必为一真一假，若这个数大于 70 则必然大于 60，所以后半句只能是这个数大于 60 小于 70，所以这个数是偶数；

由于这个数大于 60，则甲所说的大于 50 是正确，所以这个数的因数个数为奇数个，必为在 50~70 之间的偶数完全平方数，只有 64

11.如图，正方形 **ABCD** 和正方形 **EFGH**，他们的四对边互相平行。联结 **CG** 并延长交 **BD** 于点 **I**。已知 **BD=10**， $S_{\triangle BFC}=3$，$S_{\triangle CHD}=5$，则 **BI** 的长度为？



【考点】几何

【答案】$\frac{15}{4}$

分析：等积变形+燕尾模型

联结 BG，DG，FG∥BC，$S_{\triangle BCG}=S_{\triangle BCF}=3$,

同理，$S_{\triangle CDG}=S_{\triangle CDH}=5$,

BI:DI= $S_{\triangle BCG}:S_{\triangle CDG}=3:5$,

$BI=10\div(3+5)\times 3=\frac{15}{4}$

12.将 **572** 个桃子分给若干个孩子，这些孩子得到的桃子数量是一些连续的正整数，则获得桃子数量最多的那个孩子最多可以得到几个桃子？

【考点】数论，分解质因数，最值

【答案】**75**

分析：设第一人拿到 x+1 个桃子，最后一人拿到 x+k，则有 k 个人。

$572=(x+1+x+k)\times k\div 2=(2x+k+1)k\div 2$

$1144=(2x+k+1)k$，k 是 1144 的因数，$1144=11\times 13\times 2^3$

要求获得桃子数量最多的孩子最多分几个，即求最大值，则人要少，k 要小，从小往大枚举

k 为 2,4 不合题意

k=8,2x+9=143，x=67，x+k=75，获得桃子数量最多的孩子最多分 75 个。

13、定义 $n!=1\times 2\times\ldots\times n$，比如 $5!=1\times 2\times 3\times 4\times 5$，若 $\frac{n!\times(n+1)!}{2}$（其中 **n** 为正整数，且 $1\le n\le 100$）是完全平方数，比如 $n=7$ 时，

$\frac{n!\times(n+1)!}{2}=\frac{7!\times(7+1)!}{2}=\frac{7!\times8!}{2}=\frac{7!\times(7\times8)}{2}=(7!)^2\times4=(7!)^2\times2^2$ 就是一个完全平方数，则所有满足条件的 **n** 的和为________

【考点】定义新运算，完全平方数

【答案】273

分析:

$\frac{n!\ (n+1)!}{2}=(n!)^2\times\frac{n+1}{2}$，让 $\frac{n+1}{2}$ 为完全平方数即可，

$\frac{n+1}{2}=k^2$，$n=2k^2-1$

①k=1,n=1

②k=2,n=7

③k=3,n=17

④k=4,n=31

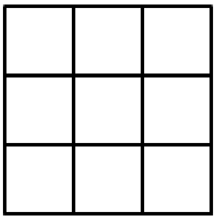
⑤k=5,n=49

⑥k=6,n=71

⑦k=7,n=97

所有满足条件的 n 的和为 1+7+17+31+49+71+97=273

14.小明将若干棋子放入如图 **3*3** 方格的小正方形内，每个小正方形内可以不放棋子，也可以放等于或多余 **1** 枚棋子，现在计算每一行，每一列的棋子总数，得到 **6** 个数，这 **6** 个数互不相同，那么最少需要放多少枚棋子？



【考点】最值，枚举

【答案】8

分析：尝试最小的和 0+1+2+3+4+5=15，由于三行之和=三列之和=总和，15 不是偶数，所以 16÷2=8，8=0+2+6=1+3+4，经试验，可如图放置，则最少需要放 8 枚棋子

0	0	0	0
1	3	2	6
0	0	2	2
1	3	4	

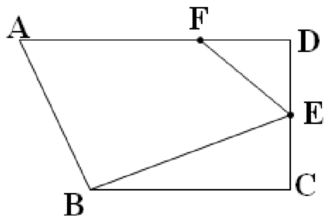
15.将 **A**、**B**、**C**、**D**、**E** 这五位老师与 **25** 个相同的座位拍成一排，之后 **25** 个学生会坐在座位上与老师拍照。要求：**A**、**B**、**C**、**D**、**E** 必须按字母顺序从左到右出现在这排中，而且每个相邻座位老师之间至少有两个座位。则一共有_____种不同的安排方法(注意：安排还是指老师与未作之间的安排，不考虑后续的学生)。

【考点】排列组合

【答案】26334

分析： 25+5=30，这道题目相当于从 1~30 这 30 个数中选 5 个数，每两个数之间的差大于等于 3，5 个数 4 个间隔，所以 30-2×4=22，即 $C_{22}^{5}=\frac{22\times21\times20\times19\times18}{5\times4\times3\times2\times1}$=26334 种

16. 如图，在一个梯形 **ABCD** 中，**AD** 平行 **BC**，**BC**：**AD=5:7.**点 **F** 在线段 **AD** 上，点 **E** 在线段 **CD** 上，满足 **AF**：**FD=4:3**，**CE**：**ED=2:3.**如果四边形 **ABEF** 的面积为 **123**，则 **ABCD** 的面积为？



【考点】几何

【答案】180

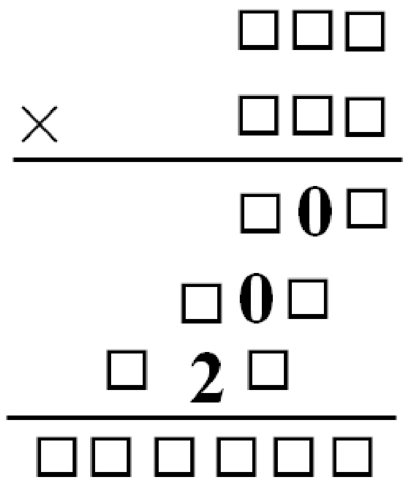
分析：（为简化计算，可令其为直角梯形，当然，不是直角梯形的时候，可通过 E 点作垂线，这时 DEF 和 BCE 的高仍为 3:2，设为 3y 和 2y，其余步骤不变）

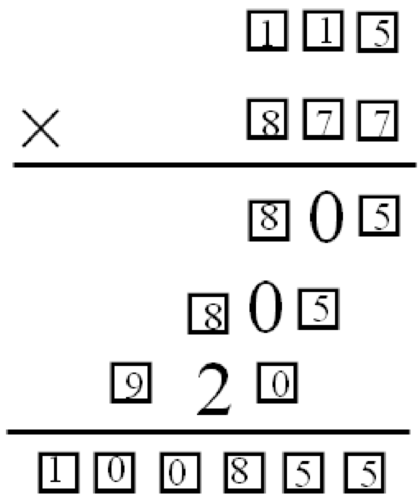
设 AD=7x，BC=5x，DC=5y。则 DF=3x，DE=3y,EC=2y。

S 梯形=（AD+BC）×CD÷2=30xy，

而 $S_{ABEF}=S_{ABCD}-S_{DEF}-S_{BEC}=30xy-\frac{9}{2}xy-5xy=\frac{41}{2}xy=123$，所以 xy=6，所求面积为 180

17. 如图算式中，最后的乘积为_________。





【考点】数字谜

【答案】100855

18. 一个五位数 $\overline{ABCDE}$ 是 **2014** 的倍数，并且 $\overline{CDE}$ 恰好有 **16** 个因数，则 $\overline{ABCDE}$ 的最小值是？

【考点】分解质因数，约数个数

【答案】24168

分析：最值问题从极端情况出发，既是五位数又是 2014 的倍数，最小为 10070;

约数个数逆应用，16=16=8×2=4×4=4×2×2=2×2×2×2，分解质因数后指数可能是（15），(7,1）

（3,1,1）(1,1,1,1）这几组。

10070　　$70=2\times5\times7$，舍
12084　　$84=2^2\times3\times7$，舍
14098　　$98=2\times7^2$，舍
16112　　$112=2^4\times7$，舍
18126　　$126=2\times3^2\times7$，舍
20140　　$140=2^2\times5\times7$，舍
22154　　$154=2\times7\times11$，舍
24168　　$168=2^3\times3\times7$，符合。$\overline{ABCDE}$最小为 24168

19. 10 个学生排成一行，老师想要为每个学生配一顶帽子，帽子有两种颜色：红色和白色，每种颜色的帽子数量都超过 10 顶。要求：任意多个连续相邻的学生里戴红帽子与戴白帽子的人数之差最多为 2。那么老师有_____种分配帽子的方法。

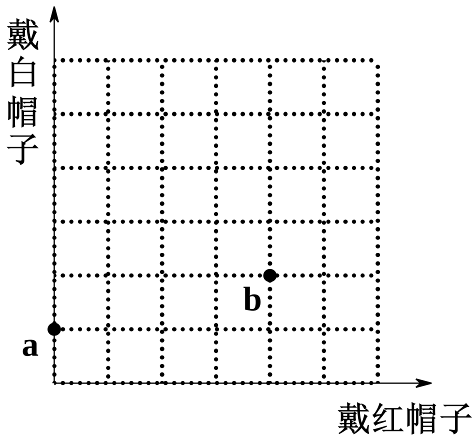
【考点】题意理解、有序枚举

【答案】94

分析：本题难度很大，主要在“任意多个连续相邻的学生里戴红帽子与戴白帽子的人数之差最多为 2”这句话。以下尝试几种方法来解答。

（统一用 √表示带红色帽子，×表示白色帽子）

法一：有序枚举，结合图形标数法



向右一格表示戴红帽子，向上一格代表戴白帽子，一共走 10 格完成

注意：①同方向最多连续两步；②取的点之间，任意两个点在横方向和竖方向的格子数差最多为 2，如图 a 点和 b 点不能同时有。（行列 1×4，2×5，3×6 都不行，易多数）

这样数下来，就是下面 47 种：

（为了使表格在一页中显示，见下页）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
√	√	×	√	×	√	×	√	×	√
√	√	×	√	×	√	×	√	×	×
√	√	×	√	×	√	×	×	√	√
√	√	×	√	×	√	×	×	√	×
√	√	×	√	×	×	√	×	√	√

√	√	×	√	×	×	√	×	√	×
√	√	×	√	×	×	√	√	×	√
√	√	×	√	×	×	√	√	×	×
√	√	×	×	√	×	√	×	√	√
√	√	×	×	√	×	√	×	√	×
√	√	×	×	√	×	√	√	×	√
√	√	×	×	√	×	√	√	×	×
√	√	×	×	√	√	×	×	√	√
√	√	×	×	√	√	×	×	√	×
√	√	×	×	√	√	×	√	×	√
√	√	×	×	√	√	×	√	×	×
√	×	√	√	×	×	√	×	√	√
√	×	√	√	×	×	√	×	√	×
√	×	√	√	×	×	√	√	×	√
√	×	√	√	×	×	√	√	×	×
√	×	√	√	×	√	×	√	×	√
√	×	√	√	×	√	×	√	×	×
√	×	√	√	×	√	×	×	√	√
√	×	√	√	×	√	×	×	√	×
√	×	√	×	√	√	×	√	×	√
√	×	√	×	√	√	×	√	×	×
√	×	√	×	√	√	×	×	√	√
√	×	√	×	√	√	×	×	√	×
√	×	√	×	√	×	×	√	√	×
√	×	√	×	√	×	×	√	×	√
√	×	√	×	√	×	√	×	×	√
√	×	√	×	√	×	√	×	√	√
√	×	√	×	√	×	√	×	√	×
√	×	√	×	√	×	√	√	×	√
√	×	√	×	√	×	√	√	×	×
√	×	√	×	×	√	×	√	√	×
√	×	√	×	×	√	×	√	×	√
√	×	√	×	×	√	√	×	×	√
√	×	√	×	×	√	√	×	√	×
√	×	×	√	√	×	×	√	√	×
√	×	√	√	√	×	×	√	×	√
√	×	√	√	√	×	√	×	×	√
√	×	√	√	√	×	√	×	√	×
√	×	√	√	×	√	√	×	√	×
√	×	√	√	×	√	√	×	×	√
√	×	√	√	×	√	×	√	√	×
√	×	√	√	×	√	×	√	×	√

这是√开头的，共 47 中，×开头也有 47 种，共 47×2=94 种。

法二：分类讨论+枚举

根据“任意多个连续相邻的学生里戴红帽子与戴白帽子的人数之差最多为 2”，那么全部 10 名学生里戴红帽子与戴白帽子的人数之差最多也为 2，因此有 6 红 4 白，5 红 5 白，4 红 6 白三种。其中 6 红 4 白和 4 红 6 白对称，种数一样。

（一）6 红 4 白

（1）6 红分三堆，红红，红红，红红

4-2=2，红红与红红之间必为两白，1 种:
√√，××，√√，××，√√;
小计，6 红分三堆共 1 种;

（2）6 红分四堆，红红，红红，红，红
①红红，红红，红，红
红红与红红之间必为两白，1 种:
√√，××，√√，×，√，×，√;
②红，红，红红，红红
同①，对称性，1 种;
③红红，红，红红，红
5-2=3，这两个间隔里必然一个是 1 白，一个是两白，2 种:
√√，××，√，×，√√，×，√;
√√，×，√，××，√√，×，√;
④红，红红，红，红红
同③，2 种
⑤红红，红，红，红红
6-2=4，两端必然不可能放白，3 种:
√√，××，√，×，√，×，√√;
√√，×，√，××，√，×，√√;
√√，×，√，×，√，××，√√;
⑥红，红红，红红，红
红红与红红之间必为两白，1 种:
√，×，√√，××，√√，×，√;
小计，6 红分四堆共 1+1+2+2+3+1=10 种;

（3）6 红分五堆，红红，红，红，红，红
①红红在第一或第五位置，四个间隔各插 1 白，共 2 种:
√√，×，√，×，√，×，√，×，√;
√√，×，√，×，√，×，√，×，√;
②红红在第二、三、四位置，四个间隔各插 1 白，共 3 种:
√，×，√√，×，√，×，√，×，√;
√，×，√，×，√√，×，√，×，√;
√，×，√，×，√，×，√√，×，√;
小计，6 红分五堆共 2+3=5 种;
所以，6 红 4 白共 1+10+5=16 种;

（二）4 红 6 白
同 6 红 4 白，共 16 种;

（三）5 红 5 白
（1）5 红分三堆，红红，红红，红
①红红，红红，红
第一个间隔红红与红红之间必为两白，第二个间隔可能 1 白，可能两白，5 种:
×，√√，××，√√，××，√;
√√，××，√√，××，√，×;
√√，××，√√，×，√，××
××，√√，××，√√，×，√，
×，√√，××，√√，×，√，×
②红，红红，红红
同①，对称性，5 种;

③红红，红，红红

5-2=3,1+2=3，划线处两间隔必为一处 1 白，一处两白，6 种:

××，√√，××，√，×，√√；
√√，××，√，×，√√，××；
×，√√，××，√，×，√√，×；
××，√√，×，√，××，√√；
√√，×，√，××，√√，××；
×，√√，×，√，××，√√，×；

小计，5 红分三堆共 5+5+6=16 种;

（2）5 红分四堆，红红，红，红，红

①红红，红，红，红

1+2=3,2+2=4，划线处三个间隔为 3 到 4 白，9 种:

×，√√，××，√，×，√，×，√；
√√，××，√，×，√，×，√，×；
×，√√，×，√，××，√，×，√；
√√，×，√，××，√，×，√，×；
×，√√，×，√，×，√，××，√；
√√，×，√，×，√，××，√，×；
××，√√，×，√，×，√，×，√；
√√，×，√，×，√，×，√，××；
×，√√，×，√，×，√，×，√，×；

②红，红，红，红红

同①，对称性，9 种;

③红，红红，红，红

1+2=3，红两边间隔处最多一处为两白，根据三处间隔两白数量可为 2，1，0 枚举，11 种:

√，××，√√，××，√，×，√,；
√，××，√√，×，√，××，√,；

×，√，××，√√，×，√，×，√；
√，××，√√，×，√，×，√，×；
×，√，×，√√，××，√，×，√；
√，×，√√，××，√，×，√，×；
×，√，×，√√，×，√，××，√；
√，×，√√，×，√，××，√，×；

××，√，×，√√，×，√，×，√；
√，×，√√，×，√，×，√，××；
×，√，×，√√，×，√，×，√，×；

④红，红，红红，红

同③，11 种;

小计，5 红分四堆共 9+9+11+11=40 种

（3）5 红分五堆，红，红，红，红，红，四个间隔各用 1 白，还剩 1 白有 6 处可放，6 种:

×，√，×，√，×，√，×，√，×，√；
√，××，√，×，√，×，√，×，√；
√，×，√，××，√，×，√，×，√；
√，×，√，×，√，××，√，×，√；
√，×，√，×，√，×，√，××，√；
√，×，√，×，√，×，√，×，√，×；

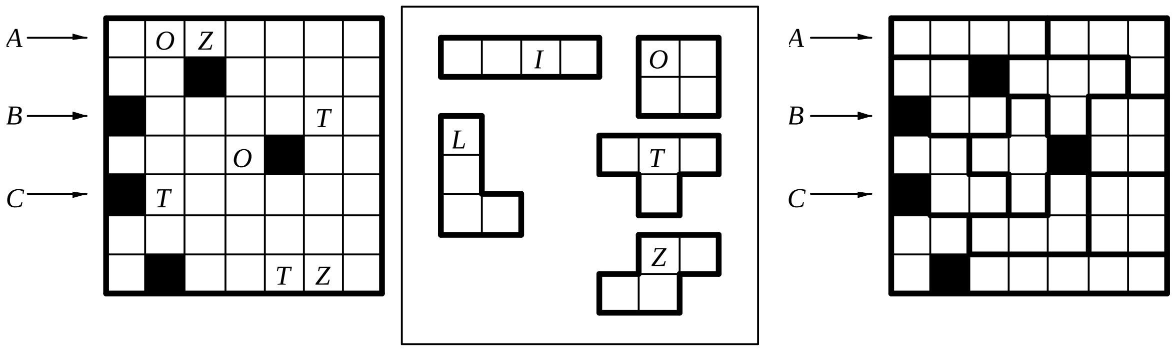
小计，5 红分五堆共 6 种;

所以，5 红 5 白共 16+40+6=62 种;

综上，共 16+16+62=94 种

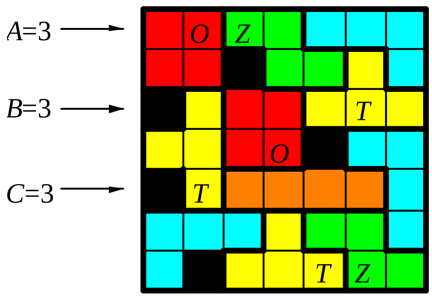
20、将下图 **1** 中的方格用图 **2** 中的图形进行填充（每类图形可使用多次，且要避开黑色方格），两个同类图形不能相邻（有公共边的图形称为相邻图形，仅有公共顶点的图形不是相邻图形）。每一类图形可以旋转、翻折后再放入方格内。每一类图形用一个字母表示，方格内小正方形中的字母表示这个小正方形被哪类图形填充了，下左图中用箭头标注了三行，假设标注的第一行格子中共用到了 **A** 个图形，标注的第二行格子中共用到了 **B** 个图形，标注的第三行格子中共用到了 **C** 个图形，则 $\overline{ABC}=$_____

比如：我们进行如图 **3** 所示的填充后（请无视最后两行，只是作为举例，用来解释 **A**、**B**、**C** 的含义），标注的第一行格子用到了 **2** 个图形（一个横过来的 **I** 图形，一个旋转、翻折后的 **L** 图形），所以 $A=2$；标注的第二行格子到了 **4** 个图形（一个翻折的 **Z** 图形，一个旋转的 **T** 图形，一个 **T** 图形，一个 **O** 图形），所以 $B=4$；标注的第三行格子到了 **4** 个图形，所以 $C=4$。于是，答案就写为 **244**



【考点】智巧趣题

【答案】333



所以 $\overline{ABC}=333$。

（\(^o^)/~特别感谢苏昊老师、俞家老师、朱博老师、焦俊老师、吴中亚老师、邵国栋老师、刘泽南老师、张岱鹏老师、范基程老师、景亚军老师）