2013年亚太小学奥林匹克第一回合

2小时
（总分：150分）
2013年4月6日
上午 $9:00-11:00$

（注意事项）
1 尽量解答所有问题。
2 不准使用数学用表或计算器。
3 答案请另填写在所提供的第一回合的作答卷上。
4 只有正确答案才能得分。

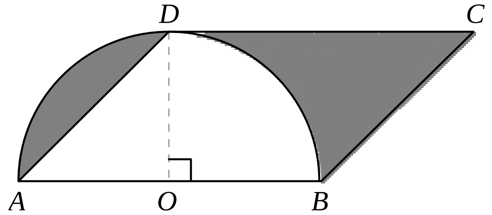
第一题至第十题，每题4分
第十一题至第二十题，每题5分
第二十一题至第三十题，每题6分

【第1题】
计算：$127354+27354+7354+354+54+4$。
【分析与解】
计算。
$127354+27354+7354+354+54+4$
$=4\times6+50\times5+300\times4+7000\times3+20000\times2+100000\times1$
$=24+250+1200+21000+40000+100000$
$=162474$

【第2题】
试求个位数和十位数都是偶数两位数的总和。
【分析与解】
计算，位值原理。
个位数和十位数都是偶数两位数一共有 $4\times5=20$ 个；
个位上，0、2、4、6、8各出现了 $20\div5=4$ 次；
十位上，2、4、6、8各出现了 $20\div4=5$ 次；
个位数和十位数都是偶数两位数的总和 $\left[(0+2+4+6+8)\times4\right]\times1+\left[(2+4+6+8)\times5\right]\times10=1080$。

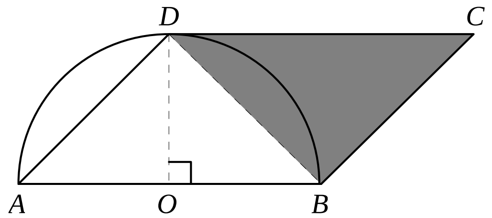
【第 3 题】

如图所示，圆心为O的半圆形与平行四边形$ABCD$部分重叠。半圆直径AB长为$12cm$。请问阴影部分的面积为多少cm^2？



【分析与解】

几何，巧求面积，割补。



在平行四边形$ABCD$中，$CD = AB = 12cm$；

在圆心为O的半圆形中，$BD = AB \div 2 = 12 \div 2 = 6cm$；

通过割补可得：$S_{阴影} = S_{\triangle BCD} = CD \times OD \div 2 = 12 \times 6 \div 2 = 36cm^2$。

【第 4 题】

A，B，C三名学生参加新加坡小学数学竞赛，比赛总共30题。已知三人分别答对26，23，18题，请问至少有几道题是三人全都答对的？

【分析与解】

容斥原理。

A答对26道题、答错$30-26=4$道题；

B答对23道题、答错$30-23=7$道题；

C答对18道题，答错$30-18=12$道题；

至少一人答错的至多有$4+7+12=23$道题；

至少有$30-23=7$道题是三人全都答对的。

【第 5 题】
计算：$555\times554555-554\times555554$。
【分析与解】
计算，乘法分配律。

$555\times554555-554\times555554$

$=555\times(554554+1)-554\times555554$

$=555\times554554+555\times1-554\times555554$

$=555\times(554\times1001)+555-554\times555554$

$=554\times(555\times1001)+555-554\times555554$

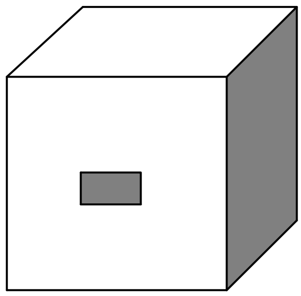
$=554\times555555+555-554\times555554$

$=554\times(555555-555554)+555$

$=554\times1+555$

$=1109$

【第 6 题】
图示一个棱长 $5cm$ 的正方体。如果在正方体前后两面的正中位置挖一条长 $3cm$、宽 $2cm$ 的长方形通道，请问正方体的表面积增加了多少 cm^2？



【分析与解】
几何，立体图形。

减少的 2 个面，面积之和为 $(3\times2)\times2=12cm^2$；

增加的 4 个面，面积之和为 $[(3+2)\times2]\times5=50cm^2$；

正方体的表面积增加了 $50-12=38cm^2$。

【第 7 题】

已知以下四个自然数$\overline{a}$，$\overline{b5}$，$\overline{c17}$，$\overline{d432}$（a，b，c，d 分别代表每个数字的首位数）的平均值为1735。

试求$a+b+c+d$之值。

【分析与解】

数字迷。

（方法一）

$\overline{a}+\overline{b5}+\overline{c17}+\overline{d432}=1735\times4$；

$\overline{a}+\left(\overline{b0}+5\right)+\left(\overline{c00}+17\right)+\left(\overline{d000}+432\right)=6940$；

$\overline{dcba}+454=6940$；

$\overline{dcba}=6486$；

$a+b+c+d=6+8+4+6=24$。

（方法二）

$\overline{a}+\overline{b5}+\overline{c17}+\overline{d432}=1735\times4=6940$；

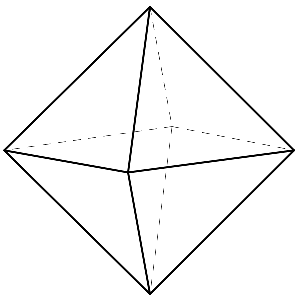
$$\begin{array}{rcccc} & & & & a \\ & & & b & 5 \\ & & c & 1 & 7 \\ + & d & 4 & 3 & 2 \\ \hline & 6 & 9 & 4 & 0 \end{array}$$

通过“数字谜”依次可得$a=6$，$b=8$，$c=4$，$d=6$；

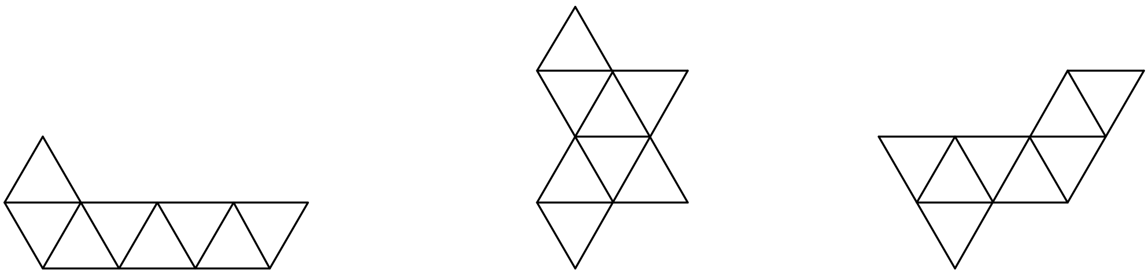
$a+b+c+d=6+8+4+6=24$。

【第 8 题】

图中的几何体叫正八面体，它有八个面，每个面都是等边三角形。



请问正八面体可由以下三种平面图形的哪一种折叠而成？



图形1　　　　　　　　图形2　　　　　　　　图形3

【分析与解】

几何，立体图形展开图。

正八面体可由以图形 2 折叠而成。

要答好这样的题，平时就要经常在脑中做一些将立体或组合或拆开的练习。

不只是在学数学的时候，比如你在画漫画或者玩电子游戏的时候都可以想一想。

【第 9 题】

已知两个质数的和是 2013，试求这两个质数的积。

【分析与解】

数论，质数，奇偶性。

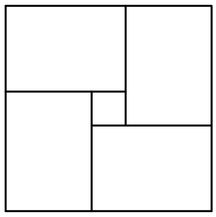
如果两个质数相加等于 2013，而 2013 是奇数;

则两个质数为一奇一偶;

所以其中偶数必是 2，另一个奇数是 $25-2=23$;

这两个质数的积为 $2\times2011=4022$。

【第 10 题】
如图，一个大正方形被分割成四个相同的长方形和一个小正方形。已知小正方形的面积是$16cm^2$，每一个长方形的面积是$140cm^2$，请问长方形的宽是多少cm？

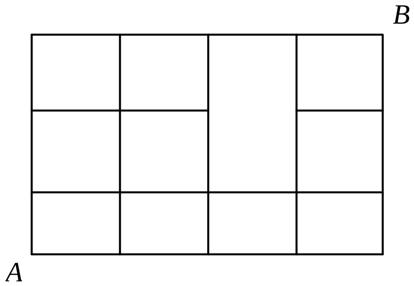


【分析与解】
几何，巧求面积。
小正方形的面积是$16cm^2$，小正方形的边长是$4cm$，即长方形的长和宽的差为$4cm$；
大正方形的面积是$16+140\times4=576cm^2$，大正方形的边长是$24cm$，即长方形的长和宽的和为$24cm$；
故长方形的宽是$\left(24-4\right)\div2=10cm$。

【第 11 题】
在24后面补上三个数字，组成一个五位数，使它能被3、4、5分别整除。请问，符合条件的五位数中，最大的是多少？
【分析与解】
整除。
如果一个数能被3、4、5分别整除；
那么这个数能被$\left[3,4,5\right]=60$整除；
$24999\div60=416\cdots\cdots39$；
符合条件的五位数中，最大的是$24999-39=24960$。

【第 12 题】

一只蚂蚁要从 A 点爬到 B 点，如果每一步只允许顺着格子线向右或向上移动，那么从 A 到 B 总共有多少种不同的路线？

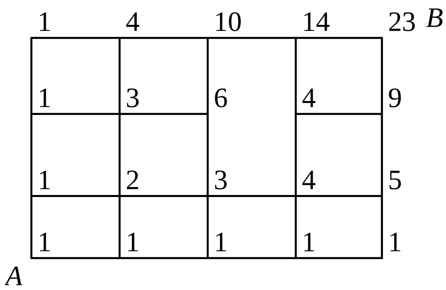


【分析与解】

计数，标数法。

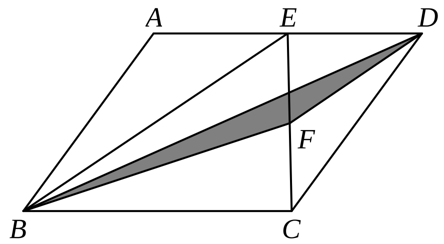
每一点的走法数为其左面的走法数与下面的走法数的和;

如图所示，从 A 到 B 总共有 23种不同的路线。



【第 13 题】

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 AD 的中点，F 是 EC 的中点。如果三角形 BFD 的面积是 $9cm^2$，试求平行四边形 $ABCD$ 的面积。



【分析与解】

几何，等积变换。

$S_{\triangle ABD}=S_{平行四边形ABCD}\times\frac{1}{2}$；

$S_{\triangle BCE}=S_{平行四边形ABCD}\times\frac{1}{2}$；

F 是 EC 的中点，$S_{\triangle BCF}=S_{\triangle BCE}\times\frac{1}{2}=S_{平行四边形ABCD}\times\frac{1}{4}$；

E 是 AD 的中点，$S_{\triangle CDE}=S_{平行四边形ABCD}\times\frac{1}{4}$；

F 是 EC 的中点，$S_{\triangle CDF}=S_{\triangle CDE}\times\frac{1}{2}=S_{平行四边形ABCD}\times\frac{1}{8}$；

$S_{\triangle BFD}=S_{平行四边形ABCD}-S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BCF}-S_{\triangle CDF}=S_{平行四边形ABCD}\times\frac{1}{8}$；

$S_{平行四边形ABCD}=S_{\triangle BFD}\times 8=9\times 8=72cm^2$。

【第 14 题】

如果将$\dfrac{2013}{1990}$表示成以下形式：

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}$$，（a，b，c，d，e为自然数。）

试求$a+b+c+d+e$之值。

【分析与解】

计算，繁分数。

因为$\dfrac{2013}{1990}=1\dfrac{23}{1990}$；所以$a=1$；

因为$\dfrac{1990}{23}=86\dfrac{12}{23}$；所以$b=86$；

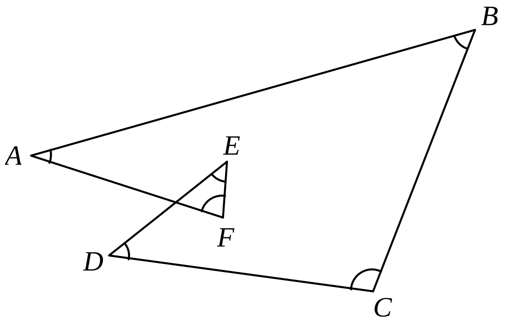
因为$\dfrac{23}{12}=1\dfrac{11}{12}$；所以$c=1$；

因为$\dfrac{12}{11}=1\dfrac{1}{11}$；所以$d=1$，$e=11$；

故$a+b+c+d+e=1+86+1+1+11=100$。

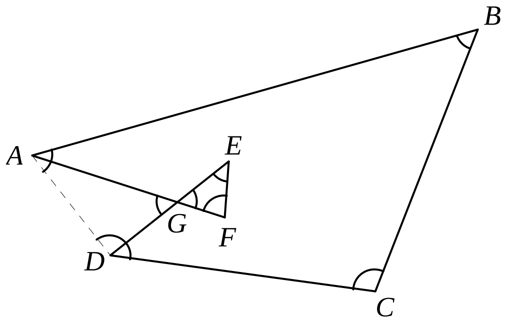
【第 15 题】

试求图中 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$ 的度数。



【分析与解】

几何，角度。



设 AF 与 DE 的交点为 G；

联结 AD；

因为 $\angle E+\angle F+\angle EGF=180^\circ$，$\angle GAD+\angle GDA+\angle AGD=180^\circ$（三角形内角和等于 180°）；

所以 $\angle E+\angle F+\angle EGF=\angle GAD+\angle GDA+\angle AGD$（等量代换）；

因为 $\angle EGF=\angle AGD$（对顶角相等）；

所以 $\angle E+\angle F=\angle GAD+\angle GDA$（等式性质）；

所以 $\angle BAG+\angle B+\angle C+\angle CDG+\angle E+\angle F=\angle BAG+\angle B+\angle C+\angle CDG+\angle GAD+\angle GDA$（等量代换）；

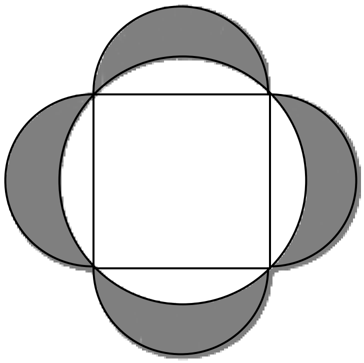
因为 $\angle BAD+\angle B+\angle C+\angle ADC=360^\circ$（四边形内角和等于 360°）；

即 $\angle BAG+\angle GAD+\angle B+\angle C+\angle CDG+\angle GDA=360^\circ$；

所以 $\angle BAG+\angle B+\angle C+\angle CDG+\angle E+\angle F=360^\circ$（等量代换）。

【第 16 题】

如图所示，一个边长为$18cm$的正方形内接于圆，再以正方形的每条边为直径作四个半圆。请问四个月牙形阴影部分总面积为多少cm^2？



【分析与解】

图形，巧求面积。

$S_{正方形}=18^2=324cm^2$；

$S_{半圆}=\frac{1}{4}\times\pi\times18^2\div2=\frac{81}{2}\pi cm^2$；

$S_{正方形}=正方形的对角线^2\div2=324cm^2$；

$正方形的对角线^2=648cm^2$；

$S_{圆}=\frac{1}{4}\times\pi\times正方形的对角线^2=\frac{1}{4}\times\pi\times648=162\pi cm^2$；

$S_{阴影}=S_{正方形}+S_{半圆}\times4-S_{圆}=324+\frac{81}{2}\pi\times4-162\pi=324cm^2$。

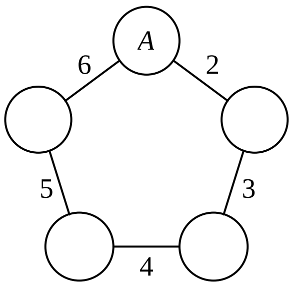
【第 17 题】

如图所示，每个圆圈中有一个自然数，并满足以下条件：

ⅰ)每条线段上所标数字是其两端圆圈中自然数的差；

ⅱ)五个圆圈中的自然数之和为1979 。

试求圆圈 A 代表的自然数。

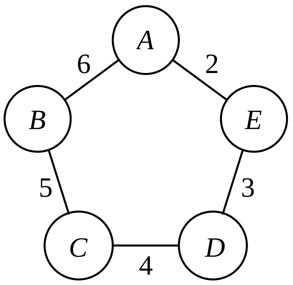


【分析与解】

$A□6□5□4□3□2=A$（□内填“+”或“−”);

$(6+5+4+3+2)\div 2=10$；

故 $A+6-5+4-3-2=A$ 或 $A-6+5-4+3+2=A$；



则 $\begin{cases}B=A+6\\C=A+1\\D=A+5\\E=A+2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}B=A-6\\C=A-1\\D=A-5\\E=A-2\end{cases}$。

当 $\begin{cases}B=A+6\\C=A+1\\D=A+5\\E=A+2\end{cases}$ 时，

$A+B+C+D+E=A+(A+6)+(A+1)+(A+5)+(A+2)=A\times 5+14=1979$，

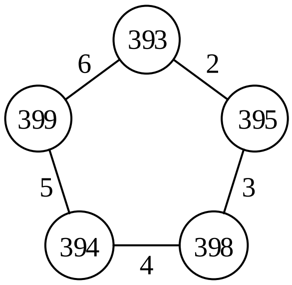
$A=(1979-14)\div 5=393$；

当$\begin{cases}B=A-6\\C=A-1\\D=A-5\\E=A-2\end{cases}$时，

$A+B+C+D+E=A+(A-6)+(A-1)+(A-5)+(A-2)=A\times5-14=1979$，

$A=(1979+14)\div5=398.6$，与A是自然数矛盾，舍去；

综上所述，$A=393$。



【第 18 题】

A、B两商店中，某种水壶的标价都是每只10元。林老师想为儿童之家的小朋友们买一批这种水壶，她发现A、B两商店都有让利优惠：A店实行买5送1（不足5只不送），B店实行买4只或4只以上打8.5折。如果林老师要买14只水壶，那么她最少需要花多少元？

【分析与解】

经济问题。

A商店：当恰好买5送1时，平均每只水壶$10\times5\div6=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$元；

B商店：当买4只或4只以上，每只水壶$10\times85\%=8.5$元；

①A商店先买10只，送2只，剩下$14-(10+2)=2$只能按原价买；

需要花$10\times10+10\times2=120$元；

②A商店先买5只，送1只，剩下$14-(5+1)=8$在B商店买；

需要花$10\times5+10\times85\%\times8=118$元；

综上所述，林老师最少需要花118元。

【第 19 题】

如果我们需要将8块相同的巧克力分给四个小朋友，并确保每个小朋友至少得到一块巧克力，请问共有多少种不同的分法？

【分析与解】

计数，组合，插板法。

8块相同的巧克力有7个间隔，分给4个小朋友需要3块板;

故共有$C_7^3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$种不同的分法。

【第 20 题】

四支足球队参加单循环赛，每两队之间赛一场。赢一场得3分，输一场0分，打平两队各得1分。全部比赛打完，四支队伍积分分别为5，1，x，6。试求x的值。

【分析与解】

体育比赛中的数学。

假设A队得5分，B队得1分，C队得x分，D队得6分;

A队得5分，A队必定1胜2平0负;

B队得1分，B队必定0胜1平2负;

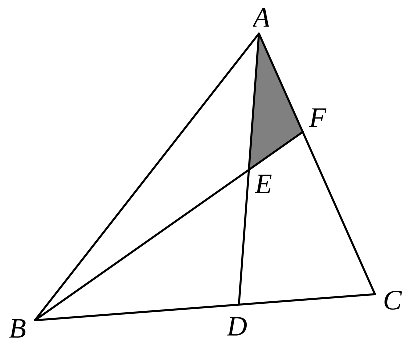
D队得6分，D队必定2胜0平1负;

则A队和B队打平，A队和C队打平，A队胜D队，B队负C队，B队负D队，C队负D队;

故C队1胜1平1负，得4分；即$x=4$。

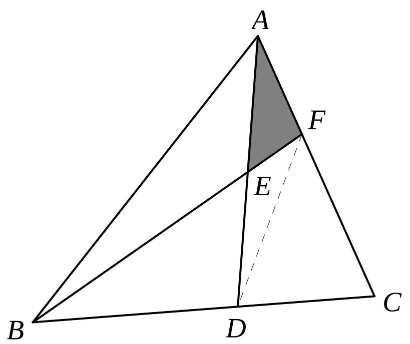
【第 21 题】

在图中，三角形 ABC 的面积是 40。已知 $2BD=3CD$， $AE=DE$， 试求图中三角形 AEF 的面积。



【分析与解】

几何，等积变换。



联结 DF；

因为 $AE=DE$； 所以 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DEF}$， $S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BDE}$；

所以 $S_{\triangle AEF}+S_{\triangle ABE}=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle BDE}$， 即 $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle BDF}$；

因为 $2BD=3CD$， 即 $BD:CD=3:2$； 所以 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=3:2$； $S_{\triangle BDF}:S_{\triangle CDF}=3:2$；

所以 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}\times\frac{2}{3+2}=S_{\triangle ABC}\times\frac{2}{5}=40\times\frac{2}{5}=16$， $S_{\triangle CDF}=S_{\triangle ABC}\times\frac{2}{3+3+2}=S_{\triangle ABC}\times\frac{1}{4}=40\times\frac{1}{4}=10$；

所以 $S_{\triangle ADF}=S_{\triangle ACD}-S_{\triangle CDF}=16-10=6$；

所以 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ADF}\times\frac{1}{2}=6\times\frac{1}{2}=3$。

【第 22 题】
从5到43中任意选取一些自然数。请问至少要取出多少个数才能使得在选出的自然数中必有两数之和是7的倍数？
【分析与解】
最不利原则。
$4\div7=0\cdots\cdots4$，$43\div7=6\cdots\cdots1$；
将$5\sim43$按除以7的余数分成7组:
① ÷7余1的数有$6-1+1=6$个，
② ÷7余2的数有$6-1=5$个，
③ ÷7余3的数有$6-1=5$个，
④ ÷7余4的数有$6-1=5$个，
⑤ ÷7余5的数有6个，
⑥ ÷7余6的数有6个，
⑦ ÷7余0的数有6个;
要使两数之和是7有4种可能:
⑴“÷7余1的数”＋“÷7余6的数”，
⑵“÷7余2的数”＋“÷7余5的数”
⑶“÷7余3的数”＋“÷7余4的数”，
⑷“÷7余0的数”＋“÷7余0的数”;
根据最不利原则，要使选出的自然数中必有两数之和是7的倍数，
⑴中先选÷7余1的数6个或÷7余6的数6个，
⑵中÷7余5的数6个，
⑶中÷7余3的数5个或÷7余4的数5个，
⑷中÷7余0的数1个，
最后再选1个数，
即至少要取出$6+6+5+1+1=19$个数。

【第 23 题】
一批工人被分配到甲、乙两个工地工作。甲工地的工作量比乙工地的工作量多50%。上午去甲工地的人数是去乙工地的人数的3倍，下午去甲工地的人数和去乙工地的人数的比是$7:5$。一天结束时，甲工地的工作已完成，乙工地的工作还需8位工人再做1天。假设每位工人的工作速度相同，请问这批工人共有几人？
【分析与解】
工程问题。

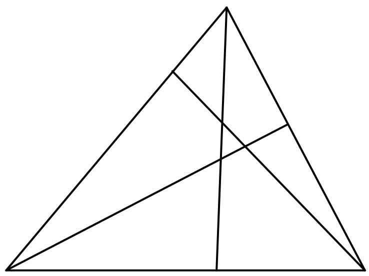
甲、乙两工地的工作量之比为$(1+50\%):1=3:2$

上午甲、乙两工地人数之比为$3:1=9:3$，下午甲、乙两工地人数之比为$7:5$；

一天结束时，甲、乙两工地完成的工作量之比为$(9\times0.5+7\times0.5):(3\times0.5+5\times0.5)=2:1=3:1.5$；

这批工人共有$8\times\dfrac{3+1.5}{2-1.5}=72$人。

【第 24 题】
请问图中共有多少个三角形？



【分析与解】
图中一共有6条线段，其中任意三条可以作为三角形的三条边，故从6条线中任选3条可组成一个三角形，但是要去掉三条线交于一点的情况；
图中共有$C_6^3-1-1-1=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}-1-1-1=17$个三角形。

【第 25 题】

客车和轿车从 A， B 两地相向同时出发， 72 分钟相遇，然后继续行驶分别到达 B 地和 A 地。如果轿车的速度是客车的 $1\frac{1}{3}$ 倍，那么客车比轿车迟多少分钟到达目的地？

【分析与解】

行程问题，相遇问题。

设客车的速度为 1;

则轿车的速度为 $1\frac{1}{3}$;

A、 B 两地相距 $\left(1+1\frac{1}{3}\right)\times 72=168$;

客车到达目的地需要 $168\div 1=168$ 分钟;

轿车到达目的地需要 $168\div 1\frac{1}{3}=126$ 分钟;

客车比轿车迟 $168-126=42$ 分钟到达目的地。

【第 26 题】

如果 a， b， c， d 是质数，且 $a\times b\times c\times d$ 是 77 个连续正整数之和，试求 $a+b+c+d$ 的最小值。

【分析与解】

数论，分级质因数。

77 个连续正整数的和 $=$ 中间项 $\times 77$;

故 $a\times b\times c\times d$ 是 77 的倍数;

而 $77=7\times 11$;

所以 a、 b、 c、 d 中至少有一个 7 和一个 11。

中间项至少 39;

$2\times 23\geqslant 39$， $2+23=25$;

$3\times 13\geqslant 39$， $3+13=16$;

$5\times 11\geqslant 39$， $5+11=16$;

$7\times 7\geqslant 39$， $7+7+14$;

要使和最小，另外两个质数都取 7;

$(a+b+c+d)_{\min}=7+11+7+7=32$。

【第 27 题】

某种品牌的汽车轮胎，如果安装在前轮，那么行驶300km后报废；如果安装在后轮，那么行驶460km后报废。如果行驶一定路程后交换前后轮胎，请问四只新轮胎最多可用来行驶多少km？

【分析与解】

工程问题。

设1个轮胎为“1”;

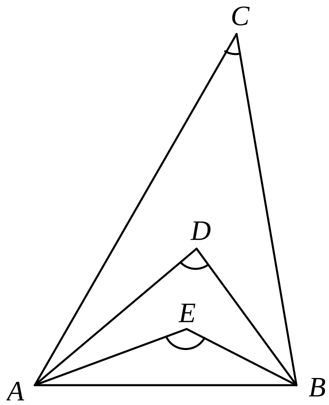
若这个轮胎安装在前轮，每千米消耗$1 \div 300 = \frac{1}{300}$；

若这个轮胎安装在后轮，每千米消耗$1 \div 450 = \frac{1}{450}$；

四只新轮胎最多可用来行驶$4 \div \left(\frac{1}{300} \times 2 + \frac{1}{450} \times 2\right) = 360km$。

【第 28 题】

如图，在三角形 ABC 中， AD 和 AE 将 $\angle CAB$ 三等分， BD 和 BE 将 $\angle CBA$ 三等分。如果角 C 和角 D 的度数比是 $1:2$，试求角 E 的度数。



【分析与解】

几何，角。

因为 $\angle C:\angle D=1:2$；所以设 $\angle C=x^\circ$， $\angle D=2x^\circ$；

根据三角形内角和为 180°， $\angle CAB+\angle CBA=(180-x)^\circ$， $\angle DAB+\angle DBA=(180-2x)^\circ$；

因为 AD 和 AE 将 $\angle CAB$ 三等分， BD 和 BE 将 $\angle CBA$ 三等分;

所以 $(\angle CAB+\angle CBA):(\angle DAB+\angle DBA)=3:2$；

即 $(180-x)^\circ:(180-2x)^\circ=3:2$；解得 $x=45$；

$\angle C=45^\circ$；

$\angle CAB+\angle CBA=180^\circ-\angle C=180^\circ-45^\circ=135^\circ$；

$\angle EAB+\angle EBA=(\angle CAB+\angle CBA)\div 3=135^\circ\div 3=45^\circ$；

$\angle E=180^\circ-(\angle EAB+\angle EBA)=180^\circ-45^\circ=135^\circ$。

【第 29 题】

十五个不同正整数的和是2002，且d是这十五个正整数的最大公约数。试求d的最大值。

【分析与解】

数论，最大公约数。

设这15个数分别是$d\times a_1$，$d\times a_2$，…，$d\times a_{15}$；

$d\times a_1+d\times a_2+\cdots+d\times a_{15}=d\times\left(a_1+a_2+\cdots+a_{15}\right)=2002$；

把2002分解质因数：$2002=2\times7\times11\times13$；

要使d尽可能的大，则$a_1+a_2+\cdots+a_{15}$要尽可能的小；

因为$d\times a_1$，$d\times a_2$，…，$d\times a_{15}$互不相同；

所以a_1，a_2，…，a_{15}也互不相同；

而$1+2+\cdots+15=(1+15)\times15\div2=120$；

在不小于120的2002的约数中，最小的是$11\times13=143$；

即$a_1+a_2+\cdots+a_{15}$最小为143；

最大公约数d的最大值是$2002\div143=14$。

【第 30 题】

从 2000 到 2015 中选出两个不同的自然数，使得两数之积是 6 的倍数。请问有多少种选法？（注：不用考虑先后顺序，比如，先选 2001 再选 2002 等同于先选 2002 再选 2001 。）

【分析与解】

计数。

$2000\sim2015$ 一共有 16 个数，

其中 2 的倍数有 8 个， 3 的倍数有 5 个， 6 的倍数有 2 个；

⑴“一个 2 的倍数但不是 6 的倍数的数” × “一个 3 的倍数但不是 6 的倍数的数”，有 $(8-2)\times(5-2)=18$ 个；

⑵“一个 6 的倍数” × “一个不是 6 的倍数的数”，有有 $2\times(16-2)=28$ 个；

⑶“一个 6 的倍数” × “一个 6 的倍数”，有 1 个；

综上所述，共 $18+28+1=47$ 个。

感谢轻墨柔扬提供试题资料