三大原理&组合计数

【真题再现】

（第11届“小机灵杯”初赛）某班有60人，其中42人会游泳，46人会骑车，50人会溜冰，55人会打乒乓球。可以肯定至少有____人四项运动都会。

（第10届“小机灵杯”初赛）由两个2和三个4组成的不同五位数的平均数是________。

（第8届“小机灵杯”初赛）在一位整数中，任取一个质数和一个合数相乘，所有乘积的总和是_______。

【例题突破】

【例 1】一次数学竞赛出了 10 道选择题，评分标准为：基础分 10 分，每道题答对得 3 分，答错扣 1 分，不答不得分。问：要保证至少有 4 人得分相同，至少需要多少人参加竞赛？

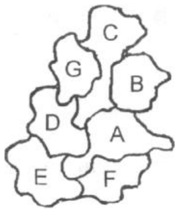
【例 2】在一块 5×5 的棋盘上，每一格可任意染成黑色或白色。证明：对任意的染法，至少有一个四角同色的矩形存在。

【例 3】某班级学生人数有 60 人，班中很多同学参加了课外兴趣小组，参加课外兴趣小组的学生中的 $\frac{1}{4}$ 参加了计算机兴趣小组， $\frac{5}{9}$ 参加了艺术兴趣小组， $\frac{1}{3}$ 参加了数学兴趣小组，又知道同时参加两个以上兴趣小组的学生人数有 4 人，求参加三个兴趣小组的学生有多少人？

【习题演练】

【练习1】用1～9可以组成______个不含重复数字的三位数：如果再要求这三个数字中任何两个的差不能是1，那么可以组成______个满足要求的三位数。

【练习 2】某沿海城市管辖 7 个县，这 7 个县的位置如下图．现用红、黑、绿、蓝、紫五种颜色给下图染色，要求任意相邻的两个县染不同颜色．共有_____种不同的染色方法。



【练习 3】在 1 到 1000 的自然数中，不能被 11，5，9 任何一个整除的数有多少个？这些数的和为多少？

【答案分析】

【真题再现】

（第11届“小机灵杯”初赛）【分析】反向考虑：不会游泳18人，不会骑车14人，不会溜冰10人，不会打乒乓球5人，所以四项都会的至少 60-（18+14+10+5）=13人。

（第10届“小机灵杯”初赛）【分析】一共有$P_5^5 \div P_2^2 \div P_3^3 = 10(个)$个不同的5 位数。

22444；42244；44224；44422；24244；42424；44242；

24424；42442；24442

每个数位上的2 出现4 次，4 出现6 次。那么可以将这10 个数的同数位的数字调整得到 4 个22222；6 个44444（总和不变）

平均数为：（22222×4+44444× 6）÷10==35555.2

（第8届小机灵杯初赛） 【分析】乘法原理。$(2+3+5+7)\times(4+6+8+9)=459$。

【例题突破】

【例 1】【分析】由题目条件这次数学竞赛的得分可以从 10-10=0 分到 10+3×10=40 分，但注意到 39、38、35 这 3 个分数是不可能得到的，要保证至少有 4 人得分相同，至少需要 3×（41-3）+1=115 人。

【例 2】【分析】每行有 5 个格，因为只有黑白两色，根据抽屉原理，必有一种颜色涂了至少 3 个格。我们称每行黑格多的为黑行，白格多的为白行。因为共有五行，所以黑行、白行中必有一种至少有三行，不妨假设前三行为黑行。在第一个黑行的三个黑格下面，第二个黑行只能有一个黑格，否则四角同色的矩形已存在。此时所有五列均有黑格，由于第三行有三个黑格，或者前三格中有两个黑格，或者后两格都是黑格，无论哪种情况四角同色的矩形已存在.另外，若有一个黑行有四或五个黑格，则在上面的讨论中，到第二个黑行时四角同色的矩形已存在。

【例 3】【分析】由于参加了课外兴趣小组的学生人数小于 60，且为 4、9、3 的公倍数，所以参加了课外兴趣小组的学生人数为 36 人，9 人参加了计算机兴趣小组，20 参加了艺术兴趣小组，12 参加了数学兴趣小组，这 41 人中，参加两个以上兴趣小组的人数被统计了两遍，参加三个兴趣小组的学生被统计的 3 遍，所以参加三个兴趣小组的学生人数为

41-36-4=1 人。

【练习1】【分析】1) 9×8×7=504个2）504-（6+5+5+5+5+5+5+6）×6-7×6=210个（减去有2个数字差是1的情况，括号里8个数分别表示这2个数是12，23，34，45，56，67，78，89的情况，×6是对3个数字全排列，7×6是三个数连续的123 234 345 456 567 789 这7种情况）

【练习 2】【分析】把地图上的 7 个县分别编号为 A、B、C、D、E、F、G(如图 1)．为了便于观察，可以把图 1 改画成(图 2)(相邻关系不改变)．我们不妨按 A、B、C、D、E、F、G 的顺序，用红、黑、绿、蓝、紫五种颜色依次染色，根据乘法原理，共有 5×4×3×3×3×3

×3=4860

种不同的染色方法．

图 1

【练习 3】【分析】（1）1 到 1000 被 11 整除的数有 90 个，被 5 整除的数有 200 个，被 9 整除的数有 111 个；

被 11 和 5 整除的数有 18 个，被 11 和 9 整除的数有 10 个，被 9 和 5 整除的数有 22 个；

能被 11、5、9 三个数整除的数有 2 个.

所以能被 3、5、8 之一整除的数有 90+200+111-18-10-22+2=353 个，

所以不能被 3，5，8 任何一个整除的数有 1000-353=647 个.

（2）先求990以前符合条件的数的和（990是11、5、9的公倍数），这些数共有640个，每两个凑成990，所以这些数的和为316800，剩下的7个数：991、992、993、994、996、997、998，和为6941.所以所有符合条件的数的和为323741。