完全平方数

【真题再现】

（第11届小机灵杯初赛）把既不是平方数也不是立方数的正整数（0除外）按从小到大的顺序排列，得到2,3,5,6,7,10,…,其中第1000个数是________。

（第8届小机灵杯初赛） 一个正整数与1470的积是一个完全平方数，那么这个数最小是（　　）。

【例题突破】

【例1】下面是一个算式$1+1\times2+1\times2\times3+1\times2\times3\times4+1\times2\times3\times4\times5+1\times2\times3\times4\times5\times6$，**这个算式的得数能否是某个数的平方？**

【例2】一个数的完全平方有39个约数，求该数的约数个数是多少？

【例3】两个完全平方数的差为77，则这两个完全平方数的和最大是多少？最小是多少？

【习题演练】

【练习1】从1到2008的所有自然数中，乘以72后是完全平方数的数共有多少个？

【练习2】写出从360到630的自然数中有奇数个约数的数．

【练习3】有两个两位数，它们的差是14，将它们分别平方，得到的两个平方数的末两位数(个位数和十位数)相同，那么这两个两位数是_____。(请写出所有可能的答案)

答案解析

【真题再现】

（第 11 届小机灵杯初赛）

【分析】考虑1到1024，1024中，完全平方数32个，立方数$1^3,2^3,3^3...,10^3$，其中1，64和729重复，所以 1024-32-10+3=985 ,还有1000-985=15个 ,那么第1000个1024+15=1039.

（第 8 届小机灵杯初赛）

【分析】$1470=2\times3\times5\times7^2$，完全平方数分解质因数后每个质因数的次数都是偶数，所以这个数最小是$2\times3\times5=30$。

【例题突破】

【例1】【分析】：判断一个数是否是某个数的平方，首先要观察它的个位数是多少．平方数的个位数只能是0，1，4，5，6，9，而2，3，7，8 不可能是平方数的个位数．这个算式的前二项之和为3，中间二项之和的个位数为0，后面二项中每项都有因子2 和5，个位数一定是0，因此，这个0 算式得数的个位数是3，不可能是某个数的平方．

【例2】【分析】：设这个数为$A=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times\cdots\times p_n^{a_n}$，则$A^2=p_1^{2a_1}\times p_2^{2a_2}\times\cdots\times p_n^{2a_n}$，

根据约数计算方法的到 $(2a_1+1)\times(2a_2+1)\times\cdots\times(2a_n+1)=39$，

由于$39=3\times13=1\times39$，所以分成两种情况：

其一 $2a_1+1=3,2a_2+1=13$，那么$a_1=1,a_2=6$，

这个数的约数个数有 $(a_1+1)\times(a_2+1)=14$个。

其二 $2a_1+1=1,2a_2+1=39$，那么$a_1=0,a_2=19$

这个数的约数个数有 $(a_1+1)\times(a_2+1)=20$个.

【例3】【分析】：设这两个完全平方数为A^2和B^2

则 $77=A^2-B^2=(A+B)\times(A-B)$，它们的和为$A^2+B^2$，即$77+2\times B^2$， B的大小决定和的大小。

$77=7\times 11=1\times 77$，则

当 $A+B=77, A-B=1$ 时， $B=38$，和最大为 $77+2\times B^2=77+2\times 38^2=2965$

当 $A+B=11, A-B=7$ 时， $B=2$， 和最小为 $77+2\times B^2=77+2\times 2^2=85$

【习题演练】

【练习1】【分析】：完全平方数，其质因数必成对出现。

$72=2^3\times 3^2$，所以如果 $A\times 72$ 为完全平方数，那么 A 必然为 $2\times B^2$ 的形式，下面来尝试在1~2008中符合要求的数就可以了。由于 $2\times 31^2\prec 2008\prec 2\times 32^2$，所以A的取值范围是 $2\times 1^2\sim 2\times 31^2$，共31个。

【练习2】【分析】：约数个数计算方法，我们用1400举例子：$1400=2^3\times 5^2\times 7^1$，质因数的次数分别是3，2，1那么1400的约数个数为 $(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=24$ 个。如果一个数有奇数个约数，说明质因数的次数都是偶数，那么这个数就是完全平方数，反之完全平方数的约数有奇数个。所以此题实际问在360~630之间有多少完全平方数，那么 $19^2\sim 25^2$，共7个，361，400，441，484，529，576，625。

【练习3】【分析】：设这两个平方数较小的为n，则另一个为 $n+14$，根据题意我们知道 $(n+14)^2-n^2=100\times k$，化简得到 $7\times(n+7)=25k$，由于 $(7,25)=1$，所以 $25\,|\,n+7$，注意到 n、$n+14$ 均为两位数，所以 $n+7$ 可能为25、50或75，则n=18、43、68，经检验均符合题意。所以这两个两位数分别是18、32，43、57或68、82.