

质数与合数

【真题再现】

(第9届“小机灵杯”初赛) 900名战士排成方阵接受检阅，若每列的人数是每排的人数的4倍，则每列有()名战士。

(第8届“小机灵杯”初赛) 一个正整数与1470的积是一个完全平方数，那么这个数最小是()。

【例题突破】

【例1】4只同样的瓶子内分别装有一定数量的油。每瓶和其他各瓶分别合称一次，记录千克数如下：8, 9, 10, 11, 12, 13。已知4只空瓶的重量之和以及油的重量之和均为质数，求最重的两瓶内有多少油？

【例2】把40, 44, 45, 63, 65, 78, 99, 105这八个数平分成两组，使每组四个数的乘积相等。

【例3】4个一位数的乘积是360，并且其中只有一个合数，那么在这4个数字所组成的四位数中，最大的一个是多少？

【习题演练】

【练习1】将1~9九个自然数分成三组，每组三个数。第一组三个数的乘积是48，第二组三个数的乘积是45，第三组三个数字之和最大是多少？

【练习2】大毛、二毛、三毛、小明四个人，他们的年龄一个比一个大2岁，他们四个人年龄的乘积是48384。问他们四个人的年龄各是几岁？

【练习3】一个分数，分母是901，分子是一个质数。现在有下面两种方法：(1)分子和分母各加一个相同的一位数；(2)分子和分母各减一个相同的一位数。用其中一种方法组成一个新分数，新分数约分后是 $\frac{7}{13}$ 。那么原来分数的分子是多少。

答案分析

【真题再现】

(第9届“小机灵杯”初赛)

【分析】每列的人数是每排的人数的4倍，两者相乘等于900，不难得到每排的人数是15，每列的人数是60。

(第8届“小机灵杯”初赛)

【分析】 $1470 = 2 \times 3 \times 5 \times 7^2$ ，完全平方数分解质因数之后每个质因数的次数都是偶数，所以这个数最小是 $2 \times 3 \times 5 = 30$ 。

【例题突破】

【例1】【分析】由于每只瓶都称了三次，因此记录数据之和是4瓶油(连瓶)重量之和的3倍，即4瓶油(连瓶)共重 $(8+9+10+11+12+13) \div 3 = 21$ (千克)，而油重之和及瓶重之和均为质数，所以它们必为一奇一偶，由于2是唯一的偶质数，只有两种可能：

(1)油重之和为19千克，瓶重之和为2千克，每只瓶重 $2 \div 4 = 0.5$ 千克，最重的两瓶内的油为 $13 - 1 = 12$ (千克)。(2)油重之和为2千克，瓶重之和为19千克，每只瓶重 $19 \div 4 = 4.75$ 千克，最轻的两瓶内的有9.5千克，这与8千克矛盾。因此最重的两瓶内共有12千克油。

【例2】【分析】要使每组四个数的乘积相等，需要每组含有相同的质因数，看质因数2，第一组含有40，第二组含有44，78，再看11,13，第一组应有40，99，65，再看5，第二组应有44，78，45，105，最后看7，第一组应有40，99，65，63。

【例3】【分析】将360分解质因数得 $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ，它是6个质因数的乘积。因为题述的四个数中只有一个合数，所有该合数必至少为 $6 - 3 = 3$ 个质因数的积，又只有3个2相乘才能是一位数，所以这4个乘数分别为3，3，5，8，所组成的最大四位数是8533。

【习题演练】

【练习1】【分析】分解质因数 $45=3\times 3\times 5$ ， $48=2\times 2\times 2\times 2\times 3$ ，可知45只能是1，5，9的乘积，而48可能是2，4，6或2，3，8或1，6，8(舍去)，则第三组的三个数可能是3，7，8或4，6，7，其中和最大的是 $3+7+8=18$ 。

【练习2】【分析】题中告诉我们，48384是四个人年龄的乘积，只要我们把48384分解质因数，再按照每组相差2来分成四个数相乘，这四个数就是四个人的年龄了。 $48384=28\times 33\times 7=(22\times 3)\times (2\times 7)\times 24\times (2\times 32)=12\times 14\times 16\times 18$ ，得出这四个人的年龄分别是12岁、14岁、16岁、18岁。由题意可知，这四个数是相差2的四个整数。它们的积是偶数，当然这四个数不是奇数，一定是偶数。又因为48384的个位数字不是0，显然这四个数中，没有个位数字是0的，那么这四个数的个位数字一定是2、4、6、8。又因为 $10^4 < 48348$ ，而 $48348 < 20^4$ ，所以可以断定，这四个数一定是12、14、16、18。也就是说，这四个人的年龄分别是12岁、14岁、16岁、18岁。答：这四个人的年龄分别是12岁、14岁、16岁、18岁。

【练习3】【分析】因为新分数约分后分母是13，而原分母为901，由于 $901\div 13=69\ldots 4$ ，所以分母是加上9或者减去4。若是前者则原来分数分子为 $7\times 70-9=481$ ，但 $481=13\times 37$ ，不是质数；若是后者则原来分数分子是 $69\times 7+4=487$ ，而487是质数。所以原来分数分子为487。