

## “小机灵杯”模块突破之整除和约数倍数

### 【真题再现】

(第11届“小机灵杯”初赛)某学生漏看了写在两个三位数之间的乘号,将它们当成了一个六位数,而该六位数恰好是原来乘积7倍,这两个三位数的和是\_\_\_\_\_。

(第10届“小机灵杯”初赛)将数字1,2,3,4,6,8 各使用一次,组成的能被334 整除的六位数。那么,这些六位数除以334 的商有\_\_\_\_\_种。

### 【例题突破】

【例 1】  $\overbrace{55\cdots5}^{20\text{个}5} a \overbrace{99\cdots9}^{20\text{个}9}$  (其中 5、9 各 20 个,  $a$  表示一个数字) 能被 7 整除。那么,  $a$

的值是多少?

【例 2】牛叔叔给 45 名工人发完工资后,将总钱数记在一张纸上。但是记账的那张纸被香烟烧了两个洞,上面只剩下“ $\overline{67\square8\square}$ ”,其中方框表示被烧出的洞。牛叔叔记得每名工人的工资都一样,并且都是整数元。请问:这 45 名工人的总工资有可能是多少元呢?

【例 3】将自然数 1, 2, 3, ..., 依次写下去形成一个多位数“123456789101112...”。当写到某个数  $N$  时,所形成的多位数恰好第一次能被 90 整除。请问:  $N$  是多少?

### 【习题演练】

【练习 1】大雪后的一天,小明和爸爸同时步测一个圆形花圃的周长,他俩的起点和步行方向完全相同,小明每步长 54 厘米,爸爸每步长 72 厘米。由于两人脚印有重合的,所以各走完一圈后,雪地上留下 60 个脚印。求圆形花圃的周长。

【练习 2】有一些小朋友排成一行,从左面第一人开始每隔 2 人发一个苹果;从右面第一人开始每隔 4 人发一个桔子,结果有 10 个小朋友苹果和桔子都拿到。那么这些小朋友最多有多少人?

【练习 3】已知  $m$ 、 $n$  两个数都是只含质因数 3 和 5,它们的最大公约数是 75,已知  $m$  有

12 个约数,  $n$  有 10 个约数, 求  $m$  与  $n$  的和.

## 答案解析

### 【真题再现】

(第11届“小机灵杯”初赛)

【分析】：设第一个三位数 $x$ ，第二个三位数 $y$

则，推出，注意到 $y < 10x$   $7xyxy$   $71000xyxy$

利用不等式方法  $1000x < 7xy < 1010x$

推出  $142 < y < 144.2$

如果 $y=143$ ，那么 $x=143$ ，和为 $143+143=286$

如果 $y=144$ ，那么 $x=18$ ，不符合三位数条件

(第10届“小机灵杯”初赛)

【分析】：能被334 整除的数有多少个，对应商的数量也相同，所以关键是算有多少个能被 334整除的六位数。常规思路是将334 分解成互质的规律数相乘的形式，但是我们发现  $334=2 \times 167$ ，167 不是个规律数，且是个质数，所以这样分析不行。

我们可以根据一个数能被7、11、13 整除的分析过程来解题。

### 【例题突破】

【例 1】【分析】：易知111111是7的倍数，所以原数能被7 整除，即 $55a99$  能被7 整除(弃数法)，因此 $7 \mid \overline{a99} - 55 = \overline{a44}$ ，所以 $a=6$ 。

【例 2】【分析】：设这45名工人的总工资是 $\overline{67A8B}$ 元；

因为每名工人的工资都一样，并且都是整数元；所以 $45 \mid \overline{67A8B}$ ；

因为 $45=5 \times 9$ ；所以 $5 \mid \overline{67A8B}$  且  $9 \mid \overline{67A8B}$ ；

因为 $5 \mid \overline{67A8B}$ ，所以 $5 \mid B$ ， $B=0$ 或 $5$ ；

因为 $9 \mid \overline{67A8B}$ ，所以 $9 \mid 6+7+A+8+B=A+B+21$ ， $9 \mid A+B+3$ ；

当  $B=0$  时,  $9/A+B+3=A+0+3=A+3$ ,  $A=6$ ;

当  $B=5$  时,  $9/A+B+3=A+5+3=A+8$ ,  $A=1$ ;

这 45 名工人的总工资有可能是 67680 或 67185 元。

**【例 3】【分析】**: 因为这个多位数能被 90 整除,  $90=9 \times 10$ ;

所以这个多位数能分别被 9 和 10 整除。

因为这个多位数能被 10 整除;

所以这个多位数的个位数字是 0。

因为这个多位数能被 9 整除;

所以  $9/1+2+3+\cdots+N=\frac{1}{2}N(N+1)$ ;

所以  $9/N$  或  $9/N+1$ 。

若  $9/N$ , 所以  $9/N \div 10$ , 所以  $(N \div 10)_{\min}=9$ ,  $N_{\min}=90$ ;

若  $9/N+1$ , 所以  $9/N \div 10+1$ , 所以  $(N \div 10)_{\min}=8$ ,  $N_{\min}=80$ ;

综上所述,  $N_{\min}=80$ 。

### 【习题演练】

**【练习 1】【分析】** 必须求出相邻两次脚印重合所走的路程以及走完全程脚印重合的次数。两人从起点出发到第一次脚印重合所走的路程是相同的, 是两人步长的最小公倍数, 为  $[54, 72] = 216$  厘米。在 216 厘米里, 两人留下的脚印数分别是:  $(216, 54) = 4$  (个),  $(216, 72) = 3$  (个), 由于两人有 1 个脚印重合, 所以实际上只有  $4 + 3 - 1 = 6$  (个) 脚印。  $(60, 6) = 10$ , 即走完全程共重合 10 次, 因此, 花圃周长为:  $216 \times 10 = 2160$  (厘米)。

**【练习 2】【分析】** 苹果每 3 人发 1 个, 桔子每 5 人发 1 个。因为  $[3, 5] = 15$ , 所以苹果和桔子都拿到的 10 个小朋友

之间包括这 10 个小朋友, 共有  $15 \times (10 - 1) + 1 = 136$  (人)。在他们的左边最多有 4 个小朋友

友拿到苹果，所以左边最多还有  $3 \times 4 = 12$  (人)；右边最多有 2 个小朋友拿到桔子，所以右边最多还有  $5 \times 2 = 10$  (人).所以最多有： $136 + 12 + 10 = 158$  (人)。

**【练习 3】【分析】** 因为  $75 = 3 \times 5^2$ ，如果设  $m = 3^p \times 5^q$ ,  $n = 3^x \times 5^y$ ，那么  $p$ 、 $x$  中较小的数是 1， $q$ 、 $y$  中较小的数是 2。由于一个数的约数的个数等于它分解质因数后每个质因数的次数加 1 的乘积。所以  $(p+1) \times (q+1) = 12$ ， $(x+1) \times (y+1) = 10$ 。又  $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$ ， $10 = 2 \times 5$ ，由于  $y \geq 2$ ，所以  $y+1 \geq 3$ ，那么  $y+1 = 5$ ， $x+1 = 2$ ，得到  $x=1$ ， $y=4$ 。那么  $q=2$ ，得到  $p=3$ ，所以  $m = 3^3 \times 5^2 = 675$ ， $n = 3 \times 5^4 = 1875$ ， $m + n = 2550$ 。