

# 第十四届“中环杯”中学生思维能力训练活动

## 初三年级选拔赛答案

1、【分析】

$$a^3 + b^3 + 3ab = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab = 1$$

当  $a+b=1$  时，上式等于  $(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab(a+b) = (a+b)^3 = 1$  成立。

2、【分析】

$$1584 = 2^4 \times 3^2 \times 11$$

$$\text{所以 } x_{\min} = 2^2 \times 3 \times 11^2$$

$$\text{又 } xy \mid 1584$$

$$\text{所以 } y_{\min} = 2^2 \times 3 = 12$$

3、【分析】

$$\text{设 } AD = 12a, AB = 5b$$

$$\text{则 } AE = 4a, FC = 3a, AG = 2b, BG = 3b$$

$$\text{有 } \frac{CH}{AG} = \frac{CO}{AO} = \frac{FC}{AE} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore CH = \frac{3}{2}b; DH = \frac{7}{2}b$$

$$\therefore \frac{CH}{DH} = \frac{3}{7}$$

4、【分析】

$2013 = 12 \times 160 + 93$ ，想使得所选任意两个数之和为 160，则所选的这组数字应为除 160 余 80 的数，根据上式可知答案为 13 个

5、【分析】方程无解

6、【分析】

完全平方数的末尾一定是 0、1、4、5、6、9；完全平方数除以 4 的余数一定是 0 或 1；所以：

1 11 111 ...  $\underbrace{11\dots1}_{2013\uparrow 1}$  这一列数中除了 1 以外，其余的数除以 4 都余 3，所以这一列数中

只有 1 这一个数是完全平方数； $4 \quad 44 \quad 444 \quad \dots \quad \underbrace{44\dots4}_{2013\text{个}4}$  这列数可以转化为

$4 \times 1 \quad 4 \times 11 \quad 4 \times 111 \quad \dots \quad 4 \times \underbrace{11\dots1}_{2013\text{个}1}$ ，可以得出这列数中也只有 4 这一个；同理得出末尾

是 5、6、9 结尾的一列数中，只有 9 这一个数是完全平方数，  
所以共有 1、4、9 这 3 个数是完全平方数。

#### 7、【分析】

$n=1$	1
$n=2$	2
$n=3$	$1+2=3$
$n=4$	$2+3=5$
$n=5$	$3+5=8$
$n=6$	$5+8=13$
$n=7$	$8+13=21$
$n=8$	34
$n=9$	55
$n=10$	89

#### 8、【分析】

$$CF^2 = AF \cdot BF$$

$$BF = AB - AF = \frac{3}{2}AE - AF$$

$$BF = \frac{3}{2}(AF + FE) - AF = \frac{3}{2}(AF + CF) - AF$$

$$BF = \frac{1}{2}AF + \frac{3}{2}CF$$

$$CF^2 = AF\left(\frac{1}{2}AF + \frac{3}{2}CF\right)$$

$$\text{即: } 2CF^2 - 3CF \cdot AF - AF^2 = 0$$

$$CF = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}AF$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{CF} = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$$

#### 9、【分析】

连接 FC，可得  $\triangle ACF \cong \triangle ABD$

有  $\triangle GCF$  为三边比为 3:4:5 的直角三角形，即  $GF=5$

又  $\triangle EGD \sim \triangle GCF$ ，所以  $EG/DE=3/4=(a-5)/a$ ， $a=20$

10、【分析】 $n=1,2,4,6$

11、【分析】

$$\text{如题, 有 } a, b \begin{cases} 1 & a = \sqrt{2} + 1, b = \sqrt{2} - 1 \quad \textcircled{1} \\ 3 + 2\sqrt{2}, & a = b = \sqrt{2} + 1 \quad \textcircled{2} \\ 3 - 2\sqrt{2} & a = b = \sqrt{2} - 1 \quad \textcircled{3} \end{cases}$$

共 75 组, 其中②与③成对出现

$$\text{设②与③有 } x \text{ 组, ①有 } y \text{ 组, 则有: } \begin{cases} 6x + y = 111, 112, 113, 114 \\ 2x + y = 75 \end{cases}$$

即  $75 + 4x = 111, 112, 113, 114$ ; 所以只有 111 是可以取到的

12、【分析】

$$\text{延长 EF 交 AB、CD 于 M、N, 有 } MN = \frac{a+b}{2}, \quad ME = FN = \frac{a}{2}, \quad EF = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$\therefore \begin{cases} S_{EFDA} = \left(\frac{b-a}{2} + a\right)h_1 \times \frac{1}{2} \\ S_{EFCB} = \left(\frac{b-a}{2} + B\right)h_2 \times \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{又} \because \frac{S_{EFDA}}{S_{EFCB}} = \frac{1}{k}, \text{ 可得 } \frac{a+b}{3b-a} = \frac{1}{k}, \text{ 整理得: } \frac{a}{b} = \frac{3-k}{k+1}$$

13、【分析】

$$\triangle = 4(2a-1)^2 - 4a \times 4(a-3) = 4(8a+1)$$

①  $8a+1$  为平方数 (奇数)

$$\text{设 } 8a+1 = (2n+1)^2$$

$$\therefore n^2 + n = 2a$$

$$\textcircled{2} \quad x = \frac{-2(2a-1) \pm 2\sqrt{8a+1}}{2a} = \frac{2[1 \pm (2n+1)]}{n^2 + n} - 2$$

$$x_1 = \frac{4}{n} - 2; x_2 = -\frac{4}{n+1} - 2$$

$$\therefore n = \pm 1, \pm 2, \pm 4, 0, \pm 3, -5$$

$$a = 1, 3, 6, 10$$

14、【分析】

$$\frac{2}{\cos \alpha} - \cos \alpha = \frac{5}{2} \tan \alpha$$

$$4 - 2 \cos^2 \alpha = 5 \sin \alpha$$

$$2 + 2 \sin^2 = 5 \sin \alpha$$

$$(\sin \alpha - 2)(\sin \alpha - 1) = 0$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{1}{2}; \quad \alpha = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + 2012 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2012} + 2013 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2012} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2012} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2013} \\ &= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2012} \end{aligned}$$

15、【分析】

设  $BN = x$

$$1 + x > 3 - x \Rightarrow x > 1$$

$$1 + 3 - x > x \Rightarrow x < 2$$

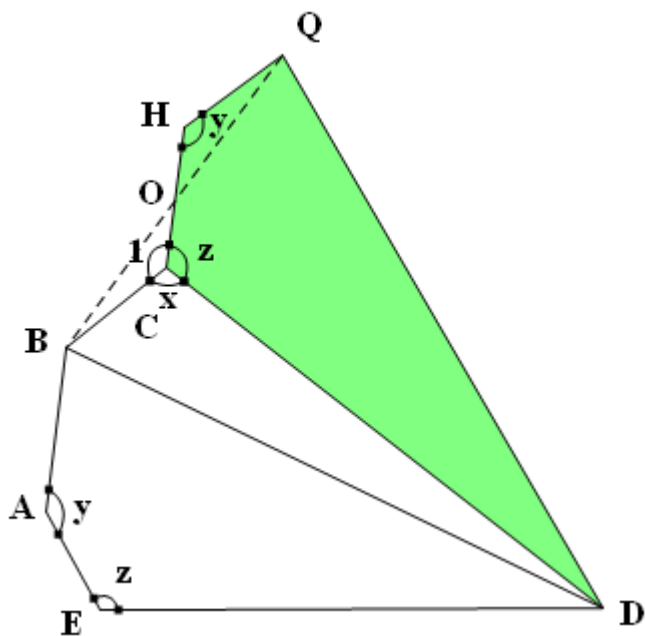
$$\therefore 1 < x < 2$$

$$\begin{aligned} \text{又 } S_{\triangle ABC} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{2(2-1)(2-x)(x-1)} \\ &= \sqrt{2(-x^2 + 3x - 2)} \end{aligned}$$

$$\text{当 } x = \frac{3}{2} \text{ 时, } S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

16、【分析】<

17、【分析】



$$x + y + z = 360^\circ$$

$$x + z + \angle 1 = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle 1 = y \\ HQ = AB = BC \end{cases}$$

$\Rightarrow HQCB$  为平行四边形

又有  $\triangle HOQ \cong \triangle CBO$

$\Rightarrow$  求  $\triangle BDQ$  面积即可

$$S = 1$$

18、【分析】

$$\text{以上三式分别乘以 } x, y, z \text{ 可得: } \begin{cases} x^2 y^2 - 2x^2 = xyz \\ y^2 z^2 - 2y^2 = xyz \\ z^2 x^2 - 2z^2 = xyz \end{cases}$$

$$\text{两两互乘可得: } \begin{cases} y^2(x^2 - z^2) = 2(x^2 - y^2) \\ z^2(y^2 - x^2) = 2(y^2 - z^2) \\ x^2(y^2 - z^2) = 2(x^2 - z^2) \end{cases}$$

$$\text{三式相乘可推出: } (x^2 - z^2)(x^2 - y^2)(y^2 - z^2) = 0$$

$$\text{即: } x = \pm y, y = \pm z, x = \pm z$$

当  $x = y = z = 0$  时, 成立;

当  $x, y, z \neq 0$  时, 设  $x = y$  时, 带入原式可推出  $y^2 = z^2$

即若  $x^2 = y^2$ ，则  $x^2 = y^2 = z^2$

令  $x^2 = y^2 = z^2 = t$ ，可得：  $t(t-2) = \pm\sqrt{t^3}$

$\therefore t^2(t-2)^2 = t^3$

$\because t \neq 0, \therefore (t-2)^2 = t$

$\therefore t = 4 \text{ 或 } t = 1$

$t = 1$ 时,  $t(t-2) < 0, x, y, z$ 不同号

$t = 4$ 时,  $t(t-2) > 0, x, y, z$ 同号

两种情况分别可以推出 4 种解，总计 9 种解

19、【分析】3 对

20、【分析】

	24	1	3		20	13		11
3			3					
18	10				8			
21	5				12			4
20	9					11		
13				6				7
3		1				2		