4.3　三角函数的图象与性质

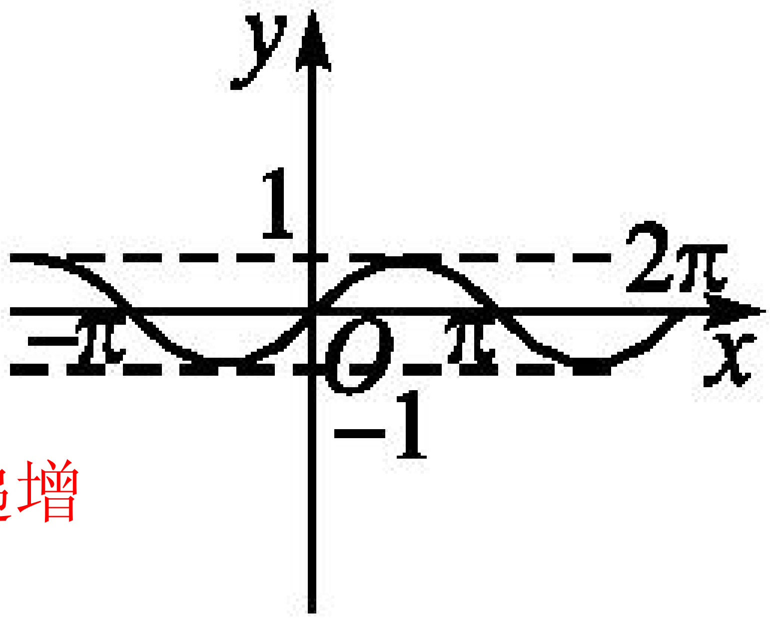
知识梳理

1.周期函数及最小正周期

对于函数$f(x)$,如果存在一个非零常数T,使得当x取定义域内的每一个值时,都有$f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$为周期函数,T为它的一个周期.若在所有周期中,有一个最小的正数,则这个最小的正数叫做$f(x)$的最小正周期.

2.正弦函数、余弦函数、正切函数的图象和性质

y=sin x



定义域：R

值域:[-1,1]

单调性：在$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$上递增

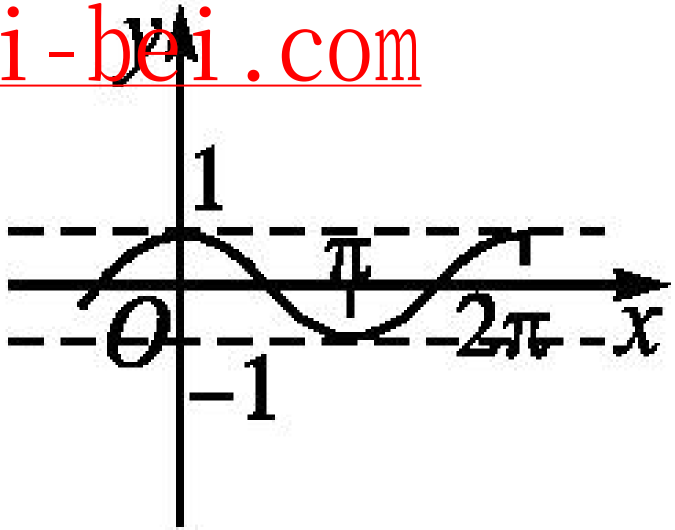
在$[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi]$上递减

最值：$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$时，$y_{max}=1$; $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$时，$y_{min}=-1$

奇偶性：奇函数　　对称中心:$(k\pi,0)$;对称轴：$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$

最小正周期:2π

y=cos x



定义域：R

值域:[-1,1]

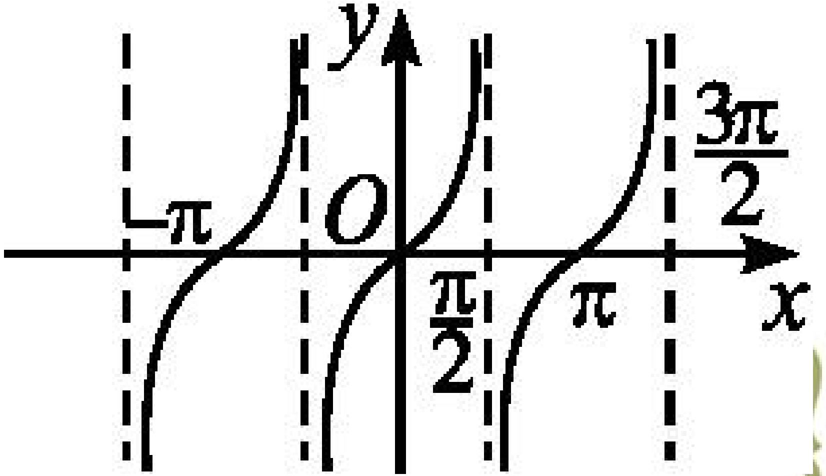
单调性：在$[2k\pi-\pi, 2k\pi]$上递增

在$[2k\pi, \pi+2k\pi]$上递减

最值：$x=2k\pi$时，$y_{max}=1$; $x=\pi+2k\pi$时，$y_{min}=-1$

奇偶性：偶函数 对称中心:$(k\pi+\dfrac{\pi}{2},0)$;对称轴：$x=k\pi$

最小正周期:2π



y=tan x

定义域:$\{x|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\}$

值域:R

单调性：在$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$上递增

无最值

奇偶性：奇函数

对称中心:$(\frac{k\pi}{2},0)$; 无对称轴

最小正周期：π

基础自测

1.下列函数中,在$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$上是增函数的是(　　).

A.y=sin x

B.y=cos x

C.y=sin 2x

D.y=cos 2x

答案：***D***

2.函数*y*=cos$\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$的图象的一条对称轴方程是　**(　　)**

- **A.*x*=–** $\frac{\pi}{2}$

B.*x*=– $\frac{\pi}{4}$

C.*x*= $\frac{\pi}{8}$

D.*x*= π

答案：***B***

3.函数$f(x)=\tan\ \omega x(\omega>0)$的图象的相邻的两支截直线$y=\frac{\pi}{4}$所得线段长为$\frac{\pi}{4}$，则$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$的值是(　　).

A.0　　B.1　　C.-1　　D.$\frac{\pi}{4}$

答案：*A*

4.已知函数$y=\sin x$的定义域为$[a,b]$,值域为$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$,则$b$-$a$的值不可能是(　　).

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. π　　D. $\frac{4\pi}{3}$

答案：*A*

思维拓展

1.是否每一个周期函数都有最小正周期?

提示:不一定.如常数函数$f(x)=a$,每一个非零数都是它的周期.

2.正弦函数和余弦函数的图象的对称轴及对称中心与函数图象的关键点有什么关系?

提示:$y=\sin x$与$y=\cos x$的对称轴方程中的x都是它们取得最大值或最小值时相应的x.对称中心的横坐标都是它们的零点.

一、求三角函数的定义域和值域

【例1】 求下列函数的值域.

(1)$y=\frac{2\sin x\cos^2 x}{1+\sin x}$ ； (2)$y=\sin^2 x+2\sin x\cos x+3\cos^2 x$.

解： （1）原式=2sinx(1-sinx)=-2sin^{2}x+2sinx

$$=-2(\sin x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$$

$$\because -1<\sin x\leq 1$$

$$\therefore y\in(-4,\frac{1}{2}]$$

（2）解：$y=1+2\cos^2 x+\sin 2x$

$$=1+\cos 2x+1+\sin 2x$$

$$=2+\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$$

$\therefore y\in[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$

二、三角函数的单调性

【例2-1】 已知函数 $f(x)=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{4})\cdot\cos(x-\frac{\pi}{4})-\cos^2 x-\sqrt{3}$

.求函数$f(x)$的最小正周期和单调递减区间.

解：$f(x)=-\cos 2x+2\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})-\sqrt{3}$

$$=2\sqrt{3}\sin^2(x+\frac{\pi}{4})-\cos 2x-\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}[1-\cos(2x+\frac{\pi}{2})]-\cos 2x-\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$$

$\therefore T=\pi$,单调递减区间为$[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{6}],k\in Z$

【例2-2】(2011重庆高考,理16)

设$a\in$R,$f(x)=\cos x(a\sin x\cdot\cos x)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$满足$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=f(0)$,求函数$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{4},\frac{11\pi}{24}\right]$上的最大值和最小值.

解：$f(x)=\frac{a}{2}\sin 2x-\cos^2 x+\sin^2 x=\frac{a}{2}\sin 2x-\cos 2x$

$\because f(-\frac{\pi}{3})=f(0) \quad \therefore a=2\sqrt{3}$

$\therefore f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

$\because x\in[\frac{\pi}{4},\frac{11\pi}{24}] \qquad \therefore 2x-\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{4}]$

$\therefore f(x)_{\min}=\sqrt{2};\ f(x)_{\max}=2$

方法提炼1.熟记$y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$的单调区间是求复杂的三角函数单调区间的基础.

2.求形如$y=A\sin(\omega x+\phi)+k$的单调区间时,只需把$\omega x+\phi$看作一个整体代入$y=\sin x$的相应单调区间即可,注意A的正负以及要先把ω化为正数.求$y=A\cos(\omega x+\phi)+k$和$y=A\tan(\omega x+\phi)+k$的单调区间类似.

三、三角函数的周期性和奇偶性

【例3-1】设函数$f(x)=\cos\ \omega x(\sqrt{3}\sin\ \omega x+\cos\ \omega x)$,其中$0<\omega<2$.

(1)若$f(x)$的周期为π,求当$-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}$时,$f(x)$的值域;

(2)若函数$f(x)$的图象的一条对称轴为$x=\frac{\pi}{3}$,求ω的值.

解：（1）$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\cos^2\omega x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 2\omega x+\frac{1}{2}$

$$=\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$$

$\because T=\pi\ \therefore\omega=1$　　$\therefore f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$

$x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$　　$\therefore 2x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$

$\therefore f(x)$的值域为$[0,\frac{3}{2}]$

$$(2)2\omega x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\therefore \frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\omega=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}k,k\in Z$$

即$:0<\frac{1}{2}+\frac{3}{2}k<2$

$$-\frac{1}{3}<k<1\therefore k=0,\omega=\frac{1}{2}$$

【例3-2】(2011天津高考,理15)已知函数$f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(1)求$f(x)$的定义域与最小正周期;

(2)设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,若$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos 2\alpha$,求 α 的大小.

解：（1）由$2x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$ 得到：$x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$

函数的定义域为:$\{x|x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in Z\}$ ；$T=\frac{\pi}{2}$

(2)$f(\alpha)=2\cos 2\alpha$,即：$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=2\cos 2\alpha$

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=2(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)$$

所以$(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=\frac{1}{2}$, 即$1-\sin2\alpha=\frac{1}{2}$

$\because\alpha\in(0,\frac{\pi}{4})\therefore 2\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ $\therefore 2\alpha=\frac{\pi}{6};\therefore\alpha=\frac{\pi}{12}$

方法提炼1.求三角函数周期的方法:

(1)利用周期函数的定义;

(2)利用公式:$y=A\sin(\omega x+\phi)$和$y=A\cos(\omega x+\phi)$的最小正周期为$\dfrac{2\pi}{|\omega|}$,$y=\tan(\omega x+\phi)$的最小正周期为$\dfrac{\pi}{|\omega|}$;

(3)利用图象.

2.三角函数的对称性:

正、余弦函数的图象既是中心对称图形,又是轴对称图形.正切函数的图象只是中心对称图形,应熟记它们的对称轴和对称中心,并注意数形结合思想的应用.