

分数加减法中的巧算（2）

同学们！在上一讲中，我们一起研究了一些分数加减法中的巧算方法，在这一讲中，我们继续来研究相关知识。

（一）阅读思考：

1. 什么是拆分？

拆分就是把一个分数写成几个分数的和或差的形式。

$$\text{例如：} \frac{1}{6} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

学会了拆分，有时就可以不通分，也能较简便地解决上面的问题。

2. 观察思考

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & \frac{1}{12} &= \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{20} &= \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} & \frac{1}{30} &= \frac{1}{5 \times 6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\ \frac{1}{42} &= \frac{1}{6 \times 7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} & \frac{2}{15} &= \frac{5-3}{3 \times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\ \frac{4}{21} &= \frac{7-3}{3 \times 7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} \end{aligned}$$

当一个分数，分母是两个数的乘积，分子是这两个数的差时，就可以拆成这两个数分别作分母，1作分子的分数的差。

$$\text{也就是} \frac{d}{n \times (n+d)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+d} \quad (n \neq 0, d \neq 0)$$

$$\text{例 1. 计算：} \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{1993 \times 1995} + \frac{1}{1995 \times 1997}$$

$$\text{因为前面讲过，} \frac{d}{n \times (n+d)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+d}$$

$$\text{当} n=1, d=2 \text{ 时，有 } \frac{2}{1 \times 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$\text{当 } n = 3, d = 2 \text{ 时, 有 } \frac{2}{3 \times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$\text{当 } n = 5, d = 2 \text{ 时, 有 } \frac{2}{5 \times 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

.....

$$\text{当 } n = 1993, d = 2 \text{ 时, 有 } \frac{2}{1993 \times 1995} = \frac{1}{1993} - \frac{1}{1995}$$

$$\text{当 } n = 1995, d = 2 \text{ 时, 有 } \frac{2}{1995 \times 1997} = \frac{1}{1995} - \frac{1}{1997}$$

$$\begin{aligned} \text{所以: } & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{1993 \times 1995} + \frac{1}{1995 \times 1997} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{1993} + \frac{1}{1995} - \frac{1}{1995} + \frac{1}{1997} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{1997} \\ &= \frac{1996}{1997} \end{aligned}$$

6. 求下面所有分数的和:

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}; \dots;$$

$$\frac{1}{1991}, \frac{2}{1991}, \dots, \frac{1989}{1991}, \frac{1990}{1991}, \frac{1991}{1991}, \frac{1990}{1991}, \frac{1989}{1991}, \dots, \frac{1}{1991}.$$

$$\text{解答: } \frac{1}{1} = 1 \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 2 \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 4 \quad \dots$$

$$\begin{aligned} \text{所以: } & \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1991} + \frac{2}{1991} + \dots + \frac{1990}{1991} + \frac{1991}{1991} + \\ & \frac{1990}{1991} + \dots + \frac{1}{1991} \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + 1990 + 1991 \\ &= (1+1991) \times 1991 \\ &= 1992 \times 1991 \\ &= 3966072 \end{aligned}$$

【模拟试题】（答题时间：30 分钟）

(二) 尝试练习

1. 计算：
$$\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \cdots + \frac{2}{1997 \times 1999} + \frac{2}{1999 \times 2001}$$

2. 计算：
$$\frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{13 \times 15} + \frac{1}{15 \times 17} + \frac{1}{17 \times 19} + \frac{1}{19 \times 21}$$

3. 计算：
$$\frac{1}{1988 \times 1989} + \frac{1}{1989 \times 1990} + \frac{1}{1990 \times 1991} + \frac{1}{1991 \times 1992} + \frac{1}{1992 \times 1993} + \frac{1}{1993}$$

4. 计算：
$$\frac{3}{4} + \frac{3}{28} + \frac{3}{70} + \frac{3}{130}$$

5. 计算：
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

6. 求出 3 至 9 之间所有分母为 2 的最简分数之和。

【试题答案】

1. 计算: $\frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{7 \times 9} + \cdots + \frac{2}{1997 \times 1999} + \frac{2}{1999 \times 2001}$
 $\frac{2000}{2001}$

2. 计算: $\frac{1}{11 \times 13} + \frac{1}{13 \times 15} + \frac{1}{15 \times 17} + \frac{1}{17 \times 19} + \frac{1}{19 \times 21}$
 $\frac{5}{231}$

3. $\frac{1}{1988 \times 1989} + \frac{1}{1989 \times 1990} + \frac{1}{1990 \times 1991} + \frac{1}{1991 \times 1992} + \frac{1}{1992 \times 1993} + \frac{1}{1993}$
 $\frac{1}{1988}$

4. 计算: $\frac{3}{4} + \frac{3}{28} + \frac{3}{70} + \frac{3}{130}$
 $\frac{12}{13}$

5. 计算: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$
 $\frac{6}{7}$

6. 求出 3 至 9 之间所有分母为 2 的最简分数之和。

36