

裂项法（一）

同学们知道：在计算分数加减法时，两个分母不同的分数相加减，要先通分化成同分母分数后再计算。

（一）阅读思考

例如 $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ，这里分母 3、4 是相邻的两个自然数，公分母正好是它们的乘积，

把这个例题推广到一般情况，就有一个很有用的等式：

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &= \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} \\ &= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{或 } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

下面利用这个等式，巧妙地计算一些分数求和的问题。

【典型例题】

$$\begin{aligned}\text{例 1. 计算: } & \frac{1}{1985 \times 1986} + \frac{1}{1986 \times 1987} + \frac{1}{1987 \times 1988} + \cdots + \frac{1}{1994 \times 1995} \\ & + \frac{1}{1995 \times 1996} + \frac{1}{1996 \times 1997} + \frac{1}{1997}\end{aligned}$$

分析与解答：

$$\frac{1}{1985 \times 1986} = \frac{1}{1985} - \frac{1}{1986}$$

$$\frac{1}{1986 \times 1987} = \frac{1}{1986} - \frac{1}{1987}$$

$$\frac{1}{1987 \times 1988} = \frac{1}{1987} - \frac{1}{1988}$$

.....

$$\frac{1}{1994 \times 1995} = \frac{1}{1994} - \frac{1}{1995}$$

$$\frac{1}{1995 \times 1996} = \frac{1}{1995} - \frac{1}{1996}$$

$$\frac{1}{1996 \times 1997} = \frac{1}{1996} - \frac{1}{1997}$$

上面 12 个式子的右面相加时，很容易看出有许多项一加一减正好相互抵消变为 0，这样一来问题解起来就十分方便了。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1985 \times 1986} + \frac{1}{1986 \times 1987} + \frac{1}{1987 \times 1988} + \cdots + \frac{1}{1995 \times 1996} + \frac{1}{1996 \times 1997} \\ & + \frac{1}{1997} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1985} - \frac{1}{1986} + \frac{1}{1986} - \frac{1}{1987} + \frac{1}{1987} - \frac{1}{1988} + \cdots + \frac{1}{1995} - \frac{1}{1996} + \frac{1}{1996} \\ & - \frac{1}{1997} + \frac{1}{1997} = \frac{1}{1985} \end{aligned}$$

像这样在计算分数的加、减时，先将其中的一些分数做适当的拆分，使得其中一部分分数可以相互抵消，从而使计算简化的方法，我们称为裂项法。

例 2. 计算： $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+100}$

公式的变式

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{2}{n \times (n-1)}$$

当 n 分别取 1, 2, 3, …, 100 时, 就有

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{1 \times 2}$$

$$\frac{1}{1+2} = \frac{2}{2 \times 3}$$

$$\frac{1}{1+2+3} = \frac{2}{3 \times 4}$$

$$\frac{1}{1+2+3+4} = \frac{2}{4 \times 5}$$

$$\frac{1}{1+2+\cdots+100} = \frac{2}{100 \times 101}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+100} \\ &= \frac{2}{1 \times 2} + \frac{2}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 4} + \cdots + \frac{2}{99 \times 100} + \frac{2}{100 \times 101} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100} + \frac{1}{100 \times 101} \right) \\ &= 2 \times \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) \\ &= 2 \times \left(1 - \frac{1}{101} \right) \\ &= 2 \times \frac{100}{101} \\ &= \frac{200}{101} \\ &= 1 \frac{99}{101} \end{aligned}$$

例 3. 设符号 (\quad) 、 $<$ $>$ 代表不同的自然数，问算式 $\frac{1}{6} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{<\quad>}$ 中这两个符号所代表的数的积是多少？

分析与解：减法是加法的逆运算， $\frac{1}{6} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{<\quad>}$ 就变成 $\frac{1}{6} - \frac{1}{(\quad)} = \frac{1}{<\quad>}$ ，与

前面提到的等式 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ 相联系，便可找到一组解，即 $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$

另外一种方法

设 n 、 x 、 y 都是自然数，且 $x \neq y$ ，当 $\frac{1}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 时，利用上面的变加为减的想法，

得算式 $\frac{x-n}{nx} = \frac{1}{y}$ 。

这里 $\frac{1}{y}$ 是个单位分数，所以 $x-n$ 一定大于零，假定 $x-n=t>0$ ，则 $x=n+t$ ，代

入上式得 $\frac{t}{n(n+t)} = \frac{1}{y}$ ，即 $y = \frac{n^2}{t} + n$ 。

又因为 y 是自然数，所以 t 一定能整除 n^2 ，即 t 是 n^2 的约数，有 n 个 t 就有 n 个 y ，

这一来我们便得到一个比 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ 更广泛的等式，即当 $x=n+t$ ，

$y = \frac{n^2}{t} + n$ ， t 是 n^2 的约数时，一定有 $\frac{1}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ，即

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} = \frac{t}{n(n+t)}$$

上面指出当 $x = n + t$, $y = \frac{n^2}{t} + n$, t 是 n^2 的约数时, 一定有 $\frac{1}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, 这里

$n = 6, n^2 = 36$, 36 共有 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 九个约数。

当 $t = 1$ 时, $x = 7$, $y = 42$

当 $t = 2$ 时, $x = 8$, $y = 24$

当 $t = 3$ 时, $x = 9$, $y = 18$

当 $t = 4$ 时, $x = 10$, $y = 15$

当 $t = 6$ 时, $x = 12$, $y = 10$

当 $t = 9$ 时, $x = 15$, $y = 10$

当 $t = 12$ 时, $x = 18$, $y = 9$

当 $t = 18$ 时, $x = 24$, $y = 8$

当 $t = 36$ 时, $x = 42$, $y = 7$

故 () 和 < > 所代表的两数和分别为 49, 32, 27, 25。

【模拟试题】 (答题时间: 20 分钟)

二. 尝试体验:

1. 计算:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{98 \times 99} + \frac{1}{99 \times 100}$$

2. 计算: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} + \frac{1}{91} + \frac{1}{105} + \frac{1}{120}$

3. 已知 x 、 y 是互不相等的自然数, 当 $\frac{1}{18} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 时, 求 $x + y$ 。

【试题答案】

1. 计算:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{98 \times 99} + \frac{1}{99 \times 100} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\
&= 1 - \frac{1}{100} \\
&= \frac{99}{100}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \text{ 计算: } & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66} + \frac{1}{78} + \frac{1}{91} + \frac{1}{105} + \frac{1}{120} \\
&= \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \frac{2}{42} + \frac{2}{56} + \frac{2}{72} + \frac{2}{90} + \frac{2}{110} + \frac{2}{132} + \frac{2}{156} + \frac{2}{182} + \frac{2}{210} + \frac{2}{240} \\
&= 2 \times \left(\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7} + \frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10} + \frac{1}{10 \times 11} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{11 \times 12} + \frac{1}{12 \times 13} + \frac{1}{13 \times 14} + \frac{1}{14 \times 15} + \frac{1}{15 \times 16} \right) \\
&= 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{16} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{8} \\
&= \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

3. 已知 x 、 y 是互不相等的自然数, 当 $\frac{1}{18} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 时, 求 $x + y$ 。

$x + y$ 的值为: **75, 81, 96, 121, 147, 200, 361。**

因为 18 的约数有 1, 2, 3, 6, 9, 18, 共 6 个, 所以有 $\frac{1}{18} = \frac{1+1}{18 \times (1+1)} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$

$$\frac{1}{18} = \frac{1+2}{18 \times (1+2)} = \frac{1}{54} + \frac{1}{27}$$

$$54 + 27 = 81$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1+3}{18 \times (1+3)} = \frac{1}{72} + \frac{1}{24}$$

$$72 + 24 = 96$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1+6}{18 \times (1+6)} = \frac{1}{126} + \frac{1}{21}$$

$$21 + 126 = 147$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1+9}{18 \times (1+9)} = \frac{1}{180} + \frac{1}{20}$$

$$20 + 180 = 200$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1+18}{18 \times (1+18)} = \frac{1}{19} + \frac{1}{342}$$

$$19 + 342 = 361$$

$$\frac{1}{18} = \frac{2+3}{18 \times (2+3)} = \frac{1}{45} + \frac{1}{30}$$

$$30 + 45 = 75$$

$$\frac{1}{18} = \frac{2+9}{18 \times (2+9)} = \frac{1}{99} + \frac{1}{22}$$

$$22 + 99 = 121$$

还有别的解法。