

裂项法（二）

前一节我们已经讲过，利用等式 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ ，采用“裂项法”能很快求出

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{9900}$ 这类问题的结果来，把这一等式略加推广便得到另一等式：

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} = \frac{t}{n(n+t)}$ ，现利用这一等式来解一些分数的计算问题。

【典型例题】

例 1. $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{1993 \times 1995} + \frac{1}{1995 \times 1997}$

分析与解：此题如按异分母加法法则来求和，计算量太大，下面用裂项法试一试。

下面我们利用 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} = \frac{t}{n(n+t)}$ ，现在给 n 、 t 一些具体的值，看看有什么结果。

当 $n=1, t=2$ 时，有 $\frac{2}{1 \times 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$

当 $n=3, t=2$ 时，有 $\frac{2}{3 \times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$

当 $n=5, t=2$ 时，有 $\frac{2}{5 \times 7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$

.....

当 $n=1993, t=2$ 时，有 $\frac{2}{1993 \times 1995} = \frac{1}{1993} - \frac{1}{1995}$

当 $n=1995, t=2$ 时，有 $\frac{2}{1995 \times 1997} = \frac{1}{1995} - \frac{1}{1997}$

上面这 998 个等式左边的分数，其分母分别与题目中各加数的分母一样，只是分子是 2 不是 1，但是很容易将题目中各数的分子变为 2，例如

$\frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1 \times 3}, \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3 \times 5}, \cdots$ ，这样采用裂项法也能较快求出结果来。

$$\begin{aligned}
 & \text{因为 } \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1 \times 3}, \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3 \times 5}, \dots, \frac{1}{1993 \times 1995} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1993 \times 1995}, \\
 & \frac{1}{1995 \times 1997} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1995 \times 1997} \\
 & \text{所以 } \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{1993 \times 1995} + \frac{1}{1995 \times 1997} \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{1993} - \frac{1}{1995} + \frac{1}{1995} - \frac{1}{1997}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{1997}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1996}{1997} \\
 &= \frac{998}{1997}
 \end{aligned}$$

$$\text{例 2. } \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{98 \times 99 \times 100}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{3-1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{2}{1 \times 2 \times 3}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3}\right)$$

$$\text{同样可得 } \frac{1}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4}\right)$$

$$\frac{1}{3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5}\right)$$

一般地，因为

$$\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

这里 n 是任意一个自然数。

利用这一等式，采用裂项法便能较快地求出例 2 的结果。

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{98 \times 99 \times 100}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{98 \times 99} - \frac{1}{99 \times 100} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{98 \times 99} - \frac{1}{99 \times 100} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{99 \times 100} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4950 - 1}{9900}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4949}{9900}$$

$$= \frac{4949}{19800}$$

例 3. 计算： $\frac{1}{2} + \frac{1}{2+3} + \frac{1}{2+3+4} + \frac{1}{2+3+4+5} + \cdots + \frac{1}{2+3+4+\cdots+200}$

分析与解：

$$\frac{1}{2+3} = \frac{2}{(2+3) \times 2} = \frac{2}{2 \times 5}$$

$$\frac{1}{2+3+4} = \frac{2}{(2+4) \times 3} = \frac{2}{3 \times 6}$$

$$\frac{1}{2+3+4+5} = \frac{2}{(2+5) \times 4} = \frac{2}{4 \times 7}$$

$$\frac{1}{2+3+4+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{1}{2}(n+2)(n-1)} = \frac{2}{(n-1)(n+2)}$$

$$\frac{2}{(n-1)(n+2)} = 2 \times \frac{1}{(n-1)(n+2)}$$

而 $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} = \frac{(n+2)-(n-1)}{(n-1)(n+2)} = \frac{3}{(n-1)(n+2)}$

即 $\frac{1}{(n-1)(n+2)} = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2})$

连续使用上面两个等式，便可求出结果来。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2+3} + \cdots + \frac{1}{2+3+4+\cdots+200} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2 \times 5} + \frac{2}{3 \times 6} + \cdots + \frac{2}{199 \times 202} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times (\frac{3}{2 \times 5} + \frac{3}{3 \times 6} + \cdots + \frac{3}{199 \times 202}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{199} - \frac{1}{202}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times [(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{199}) - (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{202})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{199} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{200} + \frac{1}{201} + \frac{1}{202} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{200} - \frac{1}{201} - \frac{1}{202} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \left(\frac{99}{200} + \frac{66}{201} + \frac{99}{404} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{33}{100} + \frac{44}{201} + \frac{33}{202} \\
&= 1 \frac{430933}{2030100}
\end{aligned}$$

【模拟试题】（答题时间：15 分钟）

二. 尝试体验

1. 求和： $\frac{1}{3} + \frac{1}{3+4} + \frac{1}{3+4+5} + \frac{1}{3+4+5+6} + \cdots + \frac{1}{3+4+5+\cdots+20}$
2. 求和： $1\frac{1}{10} + 3\frac{1}{40} + 5\frac{1}{88} + 7\frac{1}{154} + 9\frac{1}{238} + 11\frac{1}{340}$
3. 求和： $\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{17 \times 18 \times 19 \times 20}$

【试题答案】

1. 求和: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3+4} + \frac{1}{3+4+5} + \frac{1}{3+4+5+6} + \cdots + \frac{1}{3+4+5+\cdots+20}$

$$\frac{687836}{841225}$$

2. 求和: $1\frac{1}{10} + 3\frac{1}{40} + 5\frac{1}{88} + 7\frac{1}{154} + 9\frac{1}{238} + 11\frac{1}{340}$

$$36\frac{3}{20}$$

3. 求和: $\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{17 \times 18 \times 19 \times 20}$

$$\frac{1139}{20520}$$