

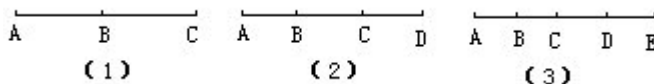
第七讲 几何中的计数问题（一）

几何中的计数问题包括：数线段、数角、数长方形、数正方形、数三角形、数综合图形等. 通过这一讲的学习，可以帮助我们养成按照一定顺序去观察、思考问题的良好习惯，逐步学会通过观察、思考探寻事物规律的能力.

一、数线段

我们把直线上两点间的部分称为线段，这两个点称为线段的端点. 线段是组成三角形、正方形、长方形、多边形等最基本的元素. 因此，观察图形中的线段，探寻线段与线段之间、线段与其他图形之间的联系，对于了解图形、分析图形是很重要的.

例 1 数一数下列图形中各有多少条线段.



分析 要想使数出的每一个图形中线段的总条数，不重复、不遗漏，就需要按照一定的顺序、按照一定的规律去观察、去数. 这样才不至于杂乱无章、毫无头绪. 我们可以按照两种顺序或两种规律去数.

第一种：按照线段的端点顺序去数，如上图（1）中，线段最左边的端点是 A，即以 A 为左端点的线段有 AB、AC 两条以 B 为左端点的线段有 BC 一条，所以上图（1）中共有线段 $2+1=3$ 条. 同样按照从左至右的顺序观察图（2）中，以 A 为左端点的线段有 AB、AC、AD 三条，以 B 为左端点的线段有 BC、BD 两条，以 C 为左端点的线段有 CD 一条. 所以上页图（2）中共有线段为 $3+2+1=6$ 条.

第二种：按照基本线段多少的顺序去数. 所谓基本线段是指一条大线段中若有 n 个分点，则这条大线段就被这 n 个分点分成 $n+1$ 条小线段，这每条小线段称为基本线段. 如上页图（2）中，线段 AD 上有两个分点 B、C，这时分点 B、C 把 AD 分成 AB、BC、CD 三条基本线段，那么线段 AD 总共有多少条线段？首先有三条基本线段，其次是包含有二条基本线段的是：AC、BD 二条，然后是包含有三条基本线段的是 AD 这样一条. 所以线段 AD 上总共有线段 $3+2+1=6$ 条，又如上页图（3）中线段 AE 上有三个分点 B、C、D，这样分点 B、C、D 把线段 AE 分为 AB、BC、CD、DE 四条基本线段，那么线段 AE 上总共有多少条线段？按照基本线段多少的顺序是：首先有 4 条基本线段，其次是包含有二条基本线段的有 3 条，然后是包含有三条基本线段的有 2 条，最后是包含有四条基本线段的有一条，所以线段 AE 上总共有线段是 $4+3+2+1=10$ 条.

解：① $2+1=3$ （条）.

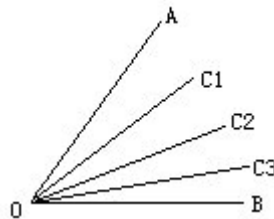
② $3+2+1=6$ (条) .

③ $4+3+2+1=10$ (条) .

小结：上述三例说明：要想不重复、不遗漏地数出所有线段，必须按照一定顺序有规律的去数，这个规律就是：线段的总条数等于从 1 开始的连续几个自然数的和，这个连续自然数的和的最大的加数是线段分点数加 1 或者是线段所有点数（包括线段的两个端点）减 1. 也就是基本线段的条数. 例如右图中线段 AF 上所有点数（包括两个端点 A、F）共有 6 个，所以从 1 开始的连续自然数的和中最的加数是 $6-1=5$ ，或者线段 AF 上的分点有 4 个（B、C、D、E）. 所以从 1 开始的连续自然数的和中最的加数是 $4+1=5$. 也就是线段 AF 上基本线段（AB、BC、CD、DE、EF）的条数是 5. 所以线段 AF 上总共有线段的条数是 $5+4+3+2+1=15$ (条) .

二、数角

例 2 数出右图中总共有多少个角.



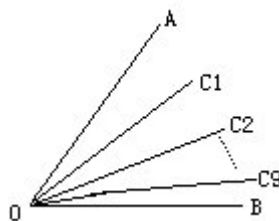
分析 在 $\angle AOB$ 内有三条角分线 OC_1 、 OC_2 、 OC_3 ， $\angle AOB$ 被这三条角分线分成 4 个基本角，那么 $\angle AOB$ 内总共有多少个角呢？首先有这 4 个基本角，其次是包含有 2 个基本角组成的角有 3 个（即 $\angle AOC_2$ 、 $\angle C_1OC_3$ 、 $\angle C_2OB$ ），然后是包含有 3 个基本角组成的角有 2 个（即 $\angle AOC_3$ 、 $\angle C_1OB$ ），最后是包含有 4 个基本角组成的角有 1 个（即 $\angle AOB$ ），所以 $\angle AOB$ 内总共有角：

$4+3+2+1=10$ (个) .

解： $4+3+2+1=10$ (个) .

小结：数角的方法可以采用例 1 数线段的方法来数，就是角的总数等于从 1 开始的几个连续自然数的和，这个和里面的最大的加数是角分线的条数加 1，也就是基本角的个数.

例 3 数一数右图中总共有多少个角？

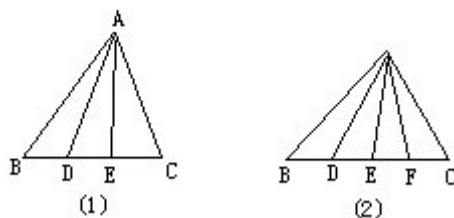


解：因为 $\angle AOB$ 内角分线 OC_1 、 $OC_2 \cdots OC_9$ 共有9条，即 $9+1=10$ 个基本角.

所以总共有角： $10+9+8+\cdots+4+3+2+1=55$ （个）.

三、数三角形

例 4 如右图中，各个图形内各有多少个三角形？



分析 可以采用类似

例 1 数线段的两种方法来数，如图（2）：

第一种方法：先数以 AB 为一条边的三角形共有：

$\triangle ABD$ 、 $\triangle ABE$ 、 $\triangle ABF$ 、 $\triangle ABC$ 四个三角形.

再数以 AD 为一条边的三角形共有：

$\triangle ADE$ 、 $\triangle ADF$ 、 $\triangle ADC$ 三个三角形.

以 AE 为一条边的三角形共有：

$\triangle AEF$ 、 $\triangle AEC$ 二个三角形.

最后以 AF 为一条边的三角形共有 $\triangle AFC$ 一个三角形.

所以三角形的个数总共有 $4+3+2+1=10$.

第二种方法：先数图中小三角形共有：

$\triangle ABD$ 、 $\triangle ADE$ 、 $\triangle AEF$ 、 $\triangle AFC$ 四个三角形.

再数由两个小三角形组合在一起的三角形共有：

$\triangle ABE$ 、 $\triangle ADF$ 、 $\triangle AEC$ 三个三角形，

以三个小三角形组合在一起的三角形共有：

$\triangle ABF$ 、 $\triangle ADC$ 二个三角形，

最后数以四个小三角形组合在一起的只有 $\triangle ABC$ 一个。

所以图中三角形的个数总共有： $4+3+2+1=10$ （个）。

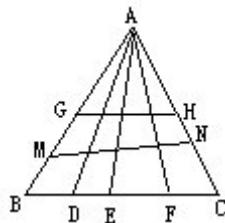
解：① $3+2+1=6$ （个）

② $4+3+2+1=10$ （个）。

答：图（1）及图（2）中各有三角形分别是 6 个和 10 个。

小结：计算三角形的总数也等于从 1 开始的几个连续自然数的和，其中最大的加数就是三角形一边上的分点数加 1，也就是三角形这边上分成的基本线段的条数。

例 5 如右图中，数一数共有多少条线段？共有多少个三角形？



分析在数的过程中应充分利用上几例总结的规律，明确数什么？

怎么数？这样两个问题. 数：就是要数出图中基本线段（基本三角形）的条数，算：就是以基本线段（基本三角形）条数为最大加数的从 1 开始的连续几个自然数的和。

①要数多少条线段：先看线段 AB、AD、AE、AF、AC、上各有 2 个分点，各分成 3 条基本线段，再看 BC、MN、GH 这 3 条线段上各有 3 个分点，各分成 4 条基本线段. 所以图中总共有线段是：

$$(3+2+1) \times 5 + (4+3+2+1) \times 3 = 30 + 30 = 60 \text{（条）}.$$

②要数有多少个三角形，先看在 $\triangle AGH$ 中，在 GH 上有 3 个分点，分成基本小三角形有 4 个. 所以在 $\triangle AGH$ 中共有三角形 $4+3+2+1=10$ （个）。

在 $\triangle AMN$ 与 $\triangle ABC$ 中，三角形有同样的个数，所以在 $\triangle ABC$ 中三角形个数总共：

$$(4+3+2+1) \times 3 = 10 \times 3 = 30 \text{ (个)} .$$

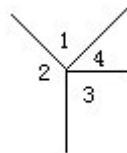
解：①在 $\triangle ABC$ 中共有线段是：

$$(3+2+1) \times 5 + (4+3+2+1) \times 3 = 30 + 30 = 60 \text{ (条)}$$

②在 $\triangle ABC$ 中共有三角形是：

$$(4+3+2+1) \times 3 = 10 \times 3 = 30 \text{ (个)} .$$

例 6 如右图中，共有多少个角？



分析本题虽然与上几例有区别，但仍可以采用上几例所总结的规律去解决.

$\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 我们可视为 4 个基本角，由 2 个基本角组成的有： $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 、 $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 、 $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 、 $\angle 4$ 与 $\angle 1$ ，共 4 个角. 由 3 个基本角组成的角有： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 与 $\angle 3$ ； $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 与 $\angle 4$ ； $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 与 $\angle 1$ ； $\angle 4$ 、 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ ，共 4 个角，由 4 个基本角组成的角只有一个.

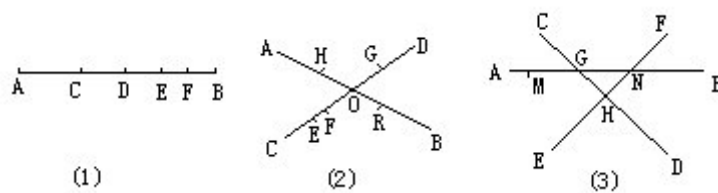
所以图中总共有角是： $4 \times 3 + 1 = 13$ (个) .

解：所以图中共有角是： $4 \times 3 + 1 = 13$ (个) .

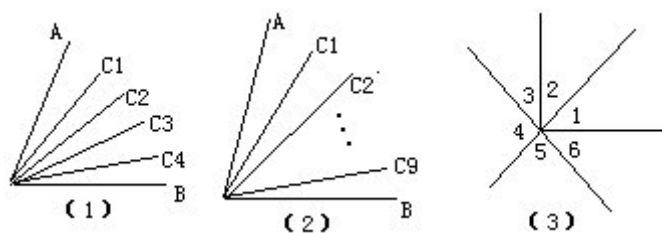
小结：由本题可以推出一般情况：若周角中含有 n 个基本角，那么它上面角的总数是 $n(n-1) + 1$.

习题七

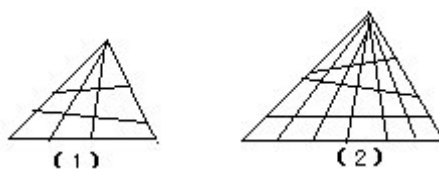
1. 数一数下图中，各有多少条线段？



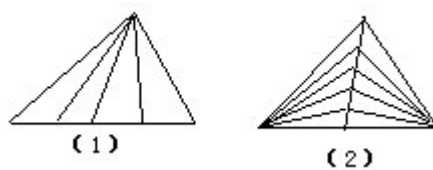
2. 数一数下图中各有多少角？



3. 数一数下图中，各有多少条线段？



4. 数一数下图中，各有多少条线段，各有多少个三角形？



习题七解答

1. ①在 AB 线段上有 4 个分点，所以它上面线段的总条数为：
 $5+4+3+2+1=15$ （条）。

②在线段 AB 上有 3 个分点，所以它上面线段的总条数为：

$$4+3+2+1=10 \text{（条）}.$$

在线段 CD 上有 4 个分点：所以它上面线段的总条数为：

$$5+4+3+2+1=15 \text{（条）}.$$

\therefore 整个图（2）共有线段 $10+15=25$ （条）。

③在线段 AB 上有 3 个分点，它上面线段的条数为：

$$4+3+2+1=10 \text{（条）}.$$

在线段 CD 上有 2 个分点，它上面线段的条数为：

$$3+2+1=6 \text{（条）}.$$

在线段 EF 上有 2 个分点，它上面线段的条数为 6 条。

所以图（3）上总共有线段 $10+6+6=22$ （条）。

2. ①在 $\angle AOB$ 内有 4 条角分线，所以共有角：

$$5+4+3+2+1=15 \text{（个）}；$$

②在 $\angle AOB$ 内有 9 条角分线，所以共有角：

$$10+9+8+7+6+5+4+3+2+1=55 \text{（个）}；$$

③周角内含有 6 个基本角，所以共有角：

$$6 \times (6-1) + 1 = 31 \text{（个）}.$$

$$3. \text{ ① } (3+2+1) \times 7 = 42；$$

$$\text{② } (6+5+4+3+2+1) \times 4 + (4+3+2+1) \times 7$$

$$= 21 \times 4 + 10 \times 7 = 84 + 70 = 154.$$

$$4. \text{ ① 有线段： } (4+3+2+1) \times 3 + (3+2+1) \times 5$$

$$=30+30=60 \text{ (条)}$$

$$\text{有三角形: } (4+3+2+1) \times 3=30 \text{ (个);}$$

$$\textcircled{2} \text{有线段: } (5+4+3+2+1) + 5 \times 2 + (2+1)$$

$$=15+10+3=28 \text{ (条)}$$

$$\text{有三角形: } (5+4+3+2+1) \times 2+5$$

$$=15 \times 2+5=35 \text{ (个).}$$