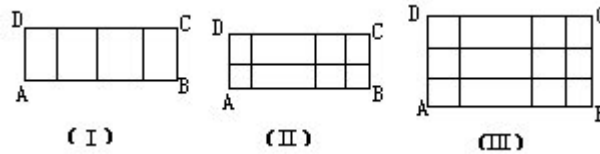


## 第八讲 几何中的计数问题（二）

我们在已经学会数线段、数角、数三角形的基础上，通过本讲学习数长方形，正方形及数综合图形来进一步提高观察和思考问题的能力，学会在观察、思考、分析中总结归纳出解决问题的规律和方法。

### 一、数长方形

例 1 如下图，数一数下列各图中长方形的个数？



分析图（I）中长方形的个数与 AB 边上所分成的线段的条数有关，每一条线段对应一个长方形，所以长方形的个数等于 AB 边上线段的条数，即长方形个数为：

$$4+3+2+1=10 \text{（个）}.$$

图（II）中 AB 边上共有线段  $4+3+2+1=10$  条，BC 边上共有线段： $2+1=3$ （条），把 AB 上的每一条线段作为长，BC 边上每一条线段作为宽，每一个长配一个宽，就组成一个长方形，所以图（II）中共有长方形为：

$$(4+3+2+1) \times (2+1) = 10 \times 3 = 30 \text{（个）}.$$

图（III）中，依据计算图（II）中长方形个数的方法：可得长方形个数为： $(4+3+2+1) \times (3+2+1) = 60$ （个）。

解：图（I）中长方形个数为  $4+3+2+1=10$ （个）。

图（II）中长方形个数为：

$$(4+3+2+1) \times (2+1) = 10 \times 3 = 30 \text{（个）}.$$

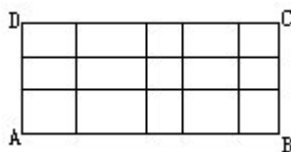
图（III）中长方形个数为：

$$(4+3+2+1) \times (3+2+1) = 10 \times 6 = 60 \text{（个）}.$$

小结：一般情况下，如果有类似图III的任一个长方形一边上有  $n-1$  个分点（不包括这条边的两个端点），另一边上有  $m-1$  个分点（不包括这条边上的两个端点），通过这些点分别作对边的平行线且与另一边相交，这两组平行线将长方形分为许多长方形，这时长方形的总数为：

$$(1+2+3+\cdots+m) \times (1+2+3+\cdots+n).$$

**例 2** 如右图数一数图中长方形的个数.



解：AB 边上分成的线段有：

$$5+4+3+2+1=15.$$

BC 边上分成的线段有：

$$3+2+1=6.$$

所以共有长方形：

$$(5+4+3+2+1) \times (3+2+1) = 15 \times 6 = 90 \text{ (个)}.$$

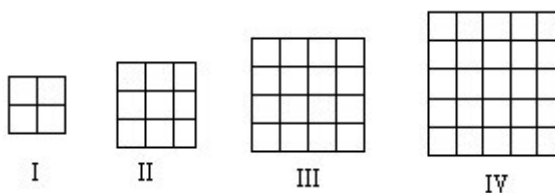
## 二、数正方形

**例 3** 数一数下页各个图中所有正方形的个数. (每个小方格为边长为 1 的正方形)

分析 图 I 中，边长为 1 个长度单位的正方形有：

$$2 \times 2 = 4 \text{ (个)}, \text{ 边长为 2 个长度单位的正方形有:}$$

$$1 \times 1 = 1 \text{ (个)}.$$



所以，正方形总数为  $1 \times 1 + 2 \times 2 = 1 + 4 = 5$  (个)。

图 II 中，边长为 1 个长度单位的正方形有  $3 \times 3 = 9$  (个)；

边长为 2 个长度单位的正方形有：  $2 \times 2 = 4$  (个)；

边长为 3 个长度单位的正方形有  $1 \times 1 = 1$  (个)。

所以，正方形的总数为：  $1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 14$  (个)。

图III中，边长为 1 个长度单位的正方形有：

$$4 \times 4 = 16 \text{ (个)} ;$$

边长为 2 个长度单位的正方形有：  $3 \times 3 = 9$  (个) ；

边长为 3 个长度单位的正方形有：  $2 \times 2 = 4$  (个) ；

边长为 4 个长度单位的正方形有：  $1 \times 1 = 1$  (个) ；

所以，正方形的总数为：

$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 = 30 \text{ (个)} .$$

图IV中，边长为 1 个长度单位的正方形有：

$$5 \times 5 = 25 \text{ (个)} ;$$

边长为 2 个长度单位的正方形有：  $4 \times 4 = 16$  (个) ；

边长为 3 个长度单位的正方形有：  $3 \times 3 = 9$  (个) ；

边长为 4 个长度单位的正方形有：  $2 \times 2 = 4$  (个) ；

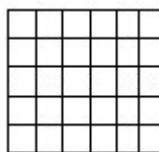
边长为 5 个长度单位的正方形有：  $1 \times 1 = 1$  (个) .

所有正方形个数为：

$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 5 = 55 \text{ (个)} .$$

小结：一般地，如果类似图IV中，一个大正方形的边长是  $n$  个长度单位，那么其中边长为 1 个长度单位的正方形个数有：  $n \times n = n^2$  (个)，边长为 2 个长度单位的正方形个数有：  $(n-1) \times (n-1) = (n-1)^2$  (个) ...；边长为  $(n-1)$  个长度单位的正方形个数有：  $2 \times 2 = 2^2$  (个)，边长为  $n$  个长度单位的正方形个数有：  $1 \times 1 = 1$  (个) . 所以，这个大正方形内所有正方形总数为：  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$  (个) .

**例 4** 如右图，数一数图中有多少个正方形（其中每个小方格都是边长为 1 个长度单位的正方形） .



分析 为叙述方便，我们规定最小正方形的边长为 1 个长度单位，又称为基本线段，图中共有五类正方形。

①以一条基本线段为边的正方形个数共有：

$$6 \times 5 = 30 \text{ (个)} .$$

②以二条基本线段为边的正方形个数共有：

$$5 \times 4 = 20 \text{ (个)} .$$

③以三条基本线段为边的正方形个数共有：

$$4 \times 3 = 12 \text{ (个)} .$$

④以四条基本线段为边的正方形个数共有：

$$3 \times 2 = 6 \text{ (个)} .$$

⑤以五条基本线段为边的正方形个数共有：

$$2 \times 1 = 2 \text{ (个)} .$$

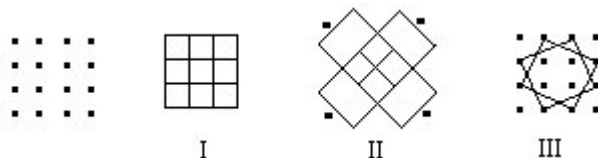
所以，正方形总数为：

$$\begin{aligned} & 6 \times 5 + 5 \times 4 + 4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 1 \\ &= 30 + 20 + 12 + 6 + 2 = 70 \text{ (个)} . \end{aligned}$$

小结：一般情况下，若一长方形的长被分成  $m$  等份，宽被分成  $n$  等份，（长和宽上的每一份是相等的）那么正方形的总数为  $(n < m)$ ： $mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \cdots + (m-n+1) \cdot 1$

显然例 4 是结论的特殊情况。

**例 5** 如下图，平面上有 16 个点，每个点上都钉上钉子，形成  $4 \times 4$  的正方形钉阵，现有许多皮筋，问能套出多少个正方形。



分析 这个问题与前面数正方形的个数是不同的，因为正方形的边不是先画好的，而是要我们去确定的，所以如何确定正方形的边长及顶点，这是我们首先要思考的问题。很明显，我们能围成上图 I 那样正向正方形

14 个，除此之外我们还能围出图 II 那样斜向正方形 4 个，图 III 那样斜向正方形 2 个，但我们不可能再围出比它们更小或更大的斜向正方形，所以斜向正方形一共有  $4+2=6$  个，总共可以围出正方形有： $14+6=20$ （个）。

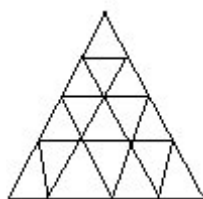
我们把上述结果列表分析可知，对于  $n \times n$  个顶点，

顶点个数	$2 \times 2$	$3 \times 3$	$4 \times 4$	$5 \times 5$
正向正方形个数	1	5	14	30
斜向正方形个数	0	1	6	20
正方形总数	1	6	20	50

可作出斜向正方形的个数恰好等于  $(n-1) \times (n-1)$  个顶点时的所有正方形的总数。

### 三、数三角形

**例 6** 如右图，数一数图中三角形的个数。



分析 这样的图形只能分类数，可以采用类似数正方形的方法，从边长为一条基本线段的最小三角形开始。

I. 以一条基本线段为边的三角形：

①尖朝上的三角形共有四层，它们的总数为：

$$W_{①上} = 1+2+3+4 = 10 \text{（个）}.$$

②尖朝下的三角形共有三层，它们的总数为：

$$W_{①下} = 1+2+3 = 6 \text{（个）}.$$

II. 以两条基本线段为边的三角形：

①尖朝上的三角形共有三层，它们的总数为：

$$W_{②上} = 1+2+3 = 6 \text{（个）}.$$

②尖朝下的三角形只有一个，记为  $W_{②下}=1$ （个）。

III. 以三条基本线段为边的三角形：

①尖朝上的三角形共有二层，它们的总数为：

$W_{③上}=1+2=3$ （个）。

②尖朝下的三角形零个，记为  $W_{③下}=0$ （个）。

IV. 以四条基本线段为边的三角形，只有一个，记为：

$W_{④上}=1$ （个）。

所以三角形的总数是  $10+6+6+1+3+1=27$ （个）。

我们还可以按另一种分类情况计算三角形的个数，即按尖朝上与尖朝下的三角形的两种分类情况计算三角形个数。

I. 尖朝上的三角形共有四种：

$W_{①下}=1+2+3+4=10$

$W_{②上}=1+2+3=6$

$W_{③上}=1+2=3$

$W_{④上}=1$

所以尖朝上的三角形共有： $10+6+3+1=20$ （个）。

II. 尖朝下的三角形共有二种：

$W_{①下}=1+2+3=6$

$W_{②下}=1$

$W_{③下}=0$

$W_{④下}=0$

则尖朝下的三角形共有： $6+1+0+0=7$ （个）

所以，尖朝上与尖朝下的三角形一共有：

$20+7=27$ （个）。

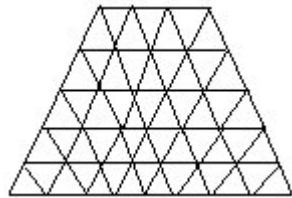
小结：尖朝上的三角形共有四种. 每一种尖朝上的三角形个数都是由 1 开始的连续自然数的和，其中连续自然数最多的和中最大的加数就是三角形每边被分成的基本线段的条数，依次各个连续自然数的和都比上一次少一个最大的加数，直到 1 为止.

尖朝下的三角形的个数也是从 1 开始的连续自然数的和，它的第一个和恰是尖朝上的第二个和，依次各个和都比上一个和少最大的两个加数，以此类推直到零为止.

**例 7** 页图数一数图中有多少个三角形.

解：参考例 6 所总结的规律把图中三角形分成尖朝上和尖朝下的两类：

I. 尖朝上的三角形有五种：



$$(1) W_{\text{上}}^{\text{①}} = 8+7+6+5+4=30$$

$$(2) W_{\text{上}}^{\text{②}} = 7+6+5+4=22$$

$$(3) W_{\text{上}}^{\text{③}} = 6+5+4=15$$

$$(4) W_{\text{上}}^{\text{④}} = 5+4=9$$

$$(5) W_{\text{上}}^{\text{⑤}} = 4$$

∴ 尖朝上的三角形共有：30+22+15+9+4=80（个）.

II. 尖朝下的三角形有四种：

$$(1) W_{\text{下}}^{\text{①}} = 3+4+5+6+7=25$$

$$(2) W_{\text{下}}^{\text{②}} = 2+3+4+5=14$$

$$(3) W_{\text{下}}^{\text{③}} = 1+2+3=6$$

$$(4) W_{\text{下}}^{\text{④}} = 1$$

尖朝下的三角形共有 25+14+6+1=46（个）.

∴所以尖朝上与尖朝下的三角形总共有

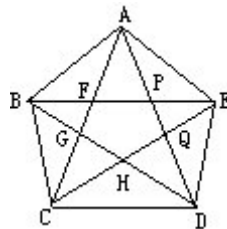
$$80+46=126 \text{ (个)}.$$

#### 四、数综合图形

前面我们已对较基本、简单的图形的数法作了较系统的研究，寻找到了规律. 而对于较复杂的图形即综合图形的数法，我们仍需遵循不重复、不遗漏的原则，采用能按规律数的，按规律数，能按分类数的就按分类数，或者两者结合起来就一定能把图形数清楚了.

**例 7** 页图，数一数图中一共有多少个三角形.

分析图中有若干个大小不同、形状各异但有规律的三角形. 因此适合分类来数. 首先要找出三角形的不同的种类？每种相同的三角形各有多少个？



解：根据图中三角形的形状和大小分为六类：

I. 与 $\triangle ABE$  相同的三角形共有 5 个；

II. 与 $\triangle ABP$  相同的三角形共有 10 个；

III. 与 $\triangle ABF$  相同的三角形共有 5 个；

IV. 与 $\triangle AFP$  相同的三角形共有 5 个；

V. 与 $\triangle ACD$  相同的三角形共有 5 个；

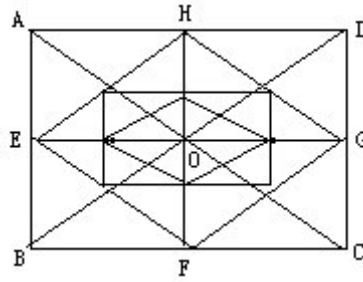
VI. 与 $\triangle AGD$  相同的三角形共有 5 个.

所以图中共有三角形为  $5+10+5+5+5+5=35$  (个) .

**例 8** 图，数一数图中一共有多少个三角形？

分析这是个对称图形，我们可按如下三步顺序来数：





第一步：大矩形 ABCD 可分为四个相同的小矩形：AEOH、EBFO、OFCG、HOGD，每个小矩形内所包含的三角形个数是相同的。

第二步：每两个小矩形组合成的图形共有四个，如：ABFH、EBCG、HFCD、AEGD，每一个这样的图形中所包含的三角形个数是相同的。

第三步：每三个小矩形占据的部分图形共有四个：如  $\triangle ABD$ 、 $\triangle ADC$ 、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DBC$ ，每一个这样的图形中所包含的三角形个数是相同的。

最后把每一步中每个图形所包含三角形个数求出相加再乘以 4 就是整个图形中所包含的三角形的个数。

解：I. 在小矩形 AEOH 中：

- ①由一个三角形构成的有 8 个。
- ②由两个三角形构成的三角形有 5 个。
- ③由三个或三个以上三角形构成的三角形有 5 个。

这样在一个小矩形内有 17 个三角形。

II. 在由两个小矩形组合成的图形中，如矩形 AEGD，共有 5 个三角形。

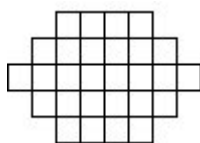
III. 由三个小矩形占据的部分图形中，如  $\triangle ABC$ ，共有 2 个三角形。

所以整个图形共有三角形个数是：

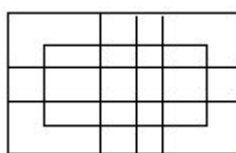
$$(8+5+5+5+2) \times 4 = 25 \times 4 = 100 \text{ (个)}.$$

## 习题八

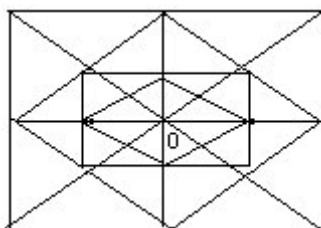
1. 下图中有多少个正方形？



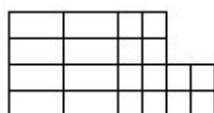
2. 下图有多少个长方形？



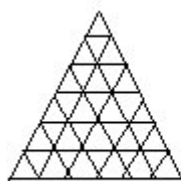
3. 下图有多少个三角形？



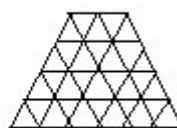
4. 下图有多少个长方形？



5. 下图（1）、（2）中各有多少个三角形？

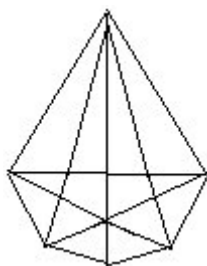


(1)

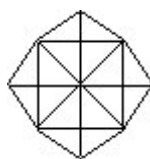


(2)

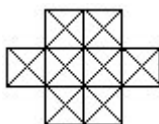
6. 下图中有多少个三角形？



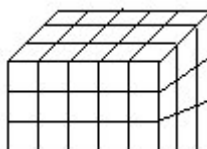
7. 下图中有多少个三角形？



8. 下图中有多少个正方形？



9. 下图中有多少个长方体？



## 习题八解答

1. 共有正方形 54 个.
2. 共有长方形 136 个.
3. 共有三角形 128 个.
4. 共有长方形 133 个.
5. (1) 共有三角形 78 个.  
(2) 共有三角形 58 个.
6. 共有三角形 45 个.
7. 共有三角形 36 个.
8. 共有正方形 24 个.
9. 共有长方体 540 个.