

第二讲 速算与巧算（四）

例 1 比较下面两个积的大小：

$$A=987654321 \times 123456789,$$

$$B=987654322 \times 123456788.$$

分析 经审题可知 A 的第一个因数的个位数字比 B 的第一个因数的个位数字小 1，但 A 的第二个因数的个位数字比 B 的第二个因数的个位数字大 1. 所以不经计算，凭直接观察不容易知道 A 和 B 哪个大. 但是无论是对 A 或是对 B，直接把两个因数相乘求积又太繁，所以我们开动脑筋，将 A 和 B 先进行恒等变形，再作判断.

$$\text{解： } A=987654321 \times 123456789$$

$$=987654321 \times (123456788+1)$$

$$=987654321 \times 123456788+987654321.$$

$$B=987654322 \times 123456788$$

$$=(987654321+1) \times 123456788$$

$$=987654321 \times 123456788+123456788.$$

因为 $987654321 > 123456788$ ，所以 $A > B$.

例 2 不用笔算，请你指出下面哪道题得数最大，并说明理由.

$$241 \times 249 \quad 242 \times 248 \quad 243 \times 247$$

$$244 \times 246 \quad 245 \times 245.$$

解：利用乘法分配律，将各式恒等变形之后，再判断.

$$241 \times 249 = (240+1) \times (250-1) = 240 \times 250 + 1 \times 9;$$

$$242 \times 248 = (240+2) \times (250-2) = 240 \times 250 + 2 \times 8;$$

$$243 \times 247 = (240+3) \times (250-3) = 240 \times 250 + 3 \times 7;$$

$$244 \times 246 = (240+4) \times (250-4) = 240 \times 250 + 4 \times 6;$$

$$245 \times 245 = (240+5) \times (250-5) = 240 \times 250 + 5 \times 5.$$

恒等变形以后的各式有相同的部分 240×250 ，又有不同的部分 1×9 ， 2×8 ， 3×7 ， 4×6 ， 5×5 ，由此很容易看出 245×245 的积最大。

一般说来，将一个整数拆成两部分（或两个整数），两部分的差值越小时，这两部分的乘积越大。

$$\text{如： } 10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5$$

则 $5 \times 5 = 25$ 积最大。

例 3 求 1966、1976、1986、1996、2006 五个数的总和。

解：五个数中，后一个数都比前一个数大 10，可看出 1986 是这五个数的平均值，故其总和为：

$$1986 \times 5 = 9930.$$

例 4 2、4、6、8、10、12…是连续偶数，如果五个连续偶数的和是 320，求它们中最小的一个。

解：五个连续偶数的中间一个数应为 $320 \div 5 = 64$ ，因相邻偶数相差 2，故这五个偶数依次是 60、62、64、66、68，其中最小的是 60。

总结以上两题，可以概括为巧用中数的计算方法。三个连续自然数，中间一个数为首末两数的平均值；五个连续自然数，中间的数也有类似的性质——它是五个自然数的平均值。如果用字母表示更为明显，这五个数可以记作： $x-2$ 、 $x-1$ 、 x 、 $x+1$ 、 $x+2$ 。如此类推，对于奇数个连续自然数，最中间的数是所有这些自然数的平均值。

如：对于 $2n+1$ 个连续自然数可以表示为： $x-n$ ， $x-n+1$ ， $x-n+2$ ， \dots ， $x-1$ ， x ， $x+1$ ， \dots ， $x+n-1$ ， $x+n$ ，其中 x 是这 $2n+1$ 个自然数的平均值。

巧用中数的计算方法，还可进一步推广，请看下面例题。

例 5 将 1~1001 各数按下面格式排列：

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
...
995	996	997	998	999	1000	1001

一个正方形框出九个数，要使这九个数之和等于：

①1986，②2529，③1989，能否办到？如果办不到，请说明理由。

解：仔细观察，方框中的九个数里，最中间的一个是这九个数的平均值，即中数。又因横行相邻两数相差1，是3个连续自然数，竖列3个数中，上下两数相差7。框中的九个数之和应是9的倍数。

①1986不是9的倍数，故不行；

② $2529 \div 9 = 281$ ，是9的倍数，但是 $281 \div 7 = 40 \times 7 + 1$ ，这说明281在题中数表的最左一列，显然它不能做中数，也不行；

③ $1989 \div 9 = 221$ ，是9的倍数，且 $221 \div 7 = 31 \times 7 + 4$ ，这就是说221在数表中第四列，它可做中数。这样可求出所框九数之和为1989是办得到的，且最大的数是229，最小的数是213。

这个例题是所谓的“月历卡”上的数字问题的推广。同学们，小小的月历卡上还有那么多有趣的问题呢！所以平时要注意观察，认真思考，积累巧算经验。

习题二

1. 右图的30个方格中，最上面的一横行和最左面的一竖列的数已经填好，其余每个格子中的数等于同一横行最左边的数与同一竖列最上面的数之和（如方格中 $a = 14 + 17 = 31$ ）。右图填满后，这30个数的总和是多少？

10	11	13	15	17	19
12					
14					
16					
18					

2. 有两个算式：① 98765×98769 ，

② 98766×98768 ，

请先不要计算出结果，用最简单的方法很快比较出哪个得数大，多少？

3. 比较 568×764 和 567×765 哪个积大？

4. 在下面四个算式中，最大的得数是多少？

① $1992 \times 1999 + 1999$

② $1993 \times 1998 + 1998$

③ $1994 \times 1997 + 1997$

④ $1995 \times 1996 + 1996$

5. 五个连续奇数的和是 85，求其中最大和最小的数.

6. 45 是从小到大五个整数之和，这些整数相邻两数之差是 3，请你写出这五个数.

7. 把从 1 到 100 的自然数如下表那样排列. 在这个数表里，把长的方面 3 个数，宽的方面 2 个数，一共 6 个数用长方形框围起来，这 6 个数的和为 81，在数表的别的地方，如上面一样地框起来的 6 个数的和为 429，问此时长方形框子里最大的数是多少？

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
...
...	97	98
99	100					

习题二解答

1. 先按图意将方格填好，再仔细观察，找出格中数字的规律进行巧算.

解法 1:

	10	11	13	15	17	19
12×6	12	11+12	13+12	15+12	17+12	19+12
14×6	14	11+14	13+14	15+14	17+14	19+14
16×6	16	11+16	13+16	15+16	17+16	19+16
18×6	18	11+18	13+18	15+18	17+18	19+18
	11×5	13×5	15×5	17×5	19×5	

先算每一横行中的偶数之和： $(12+14+16+18) \times 6 = 360$.

再算每一竖列中的奇数之和：

$$(11+13+15+17+19) \times 5 = 375$$

最后算 30 个数的总和 $= 10 + 360 + 375 = 745$.

解法 2：把每格的数算出填好.

10	11	13	15	17	19
12	23	25	27	29	31
14	25	27	29	31	33
16	27	29	31	33	35
18	29	31	33	35	37

先算出 $10+11+12+13+14$

$+15+16+17+18+19=145$,

再算其余格中的数. 经观察可以列出下式：

$$\begin{aligned}
 & (23+37) + (25+35) \times 2 \\
 & + (27+33) \times 3 + (29 \\
 & + 31) \times 4 \\
 & = 60 \times (1+2+3+4) \\
 & = 600
 \end{aligned}$$

最后算总和：

总和 $= 145 + 600 = 745$.

2. ① 98765×98769

$$= 98765 \times (98768 + 1)$$

$$= 98765 \times 98768 + 98765.$$

② 98766×98768

$$= (98765 + 1) \times 98768$$

$$= 98765 \times 98768 + 98768.$$

所以②比①大 3.

3. 同上题解法相同： $568 \times 764 > 567 \times 765$.

4. 根据“若保持和不变，则两个数的差越小，积越大”，则 $1996 \times 1996 = 3984016$ 是最大的得数.

5. $85 \div 5 = 17$ 为中数，则五个数是：13、15、17、19、21 最大的是 21，最小的数是 13.

6. $45 \div 5 = 9$ 为中数，则这五个数是：3, 6, 9, 12, 15.

7. 观察已框出的六个数，10 是上面一行的中间数，17 是下面一行的中间数， $10 + 17 = 27$ 是上、下两行中间数之和. 这个中间数之和可以用 $81 \div 3 = 27$ 求得.

利用框中六个数的这种特点，求方框中的最大数.

$$429 \div 3 = 143$$

$$(143 + 7) \div 2 = 75 \quad 75 + 1 = 76$$

最大数是 76.