如何作辅助线

作辅助线是解几何题常用的方法。但部分学生感到较难掌握，常常不知从何处入手。实际上作辅助线并不太难，当然前提是已掌握了有关定义、性质、定理等知识。

总指导:

1. 解几何题时，如果缺少某些已知条件，无法直接证明或求得结果，就常常需要作辅助线，先证明或求得这些条件。

2. 作辅助线时，常运用逆向思维，看得到所需证明或其它结果，除已知条件外，还缺什么条件。作什么样的辅助线，通过什么定理或等量代换可以求得所缺条件。

3. 一般说，作辅助线的直接目的有:

①构成直角三角形，利用“勾股定理”、“两锐角互余”等性质或定理;

②构成全等三角形，利用“对应角相等，对应边相等”性质;

③构成相似三角形，利用“对应角相等，对应边成比例”性质;

④构成等腰三角形，利用“两腰相等，两底角相等”、“三线合一”等性质;

⑤作中位线、弦垂线、中线、平行线、直(半)径等，利用有关性质或定理;

⑥利用对称、旋转、相等、相似等原理，把有关元素关联起来，进行等量代换。

一、在解决梯形问题中：

1. “平移腰”：把梯形分成一个平行四边形和一个三角形（图 1）；有时从一腰的中点作另一腰的平行线；

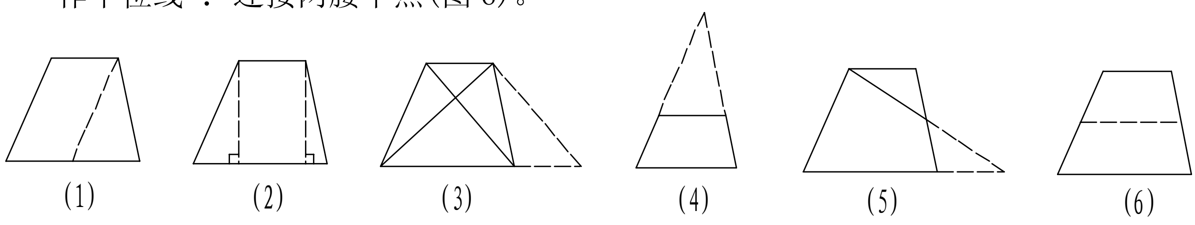
2. “作高”：使两腰在两个直角三角形中（图 2）；

3. “平移对角线”：使两条对角线在同一个三角形中（图 3）；

4. “延腰”：构造具有公共角的两个等腰三角形（图 4）；

5. “等积变形”：连结梯形上底一端点和另一腰中点，并延长与下底延长线交于一点，构成三角形（图 5）；

6. “作中位线”：连接两腰中点(图 6)。



(1)　(2)　(3)　(4)　(5)　(6)

二、在解决圆的问题中

1. 切线问题：连结过切点的半径，构成直角三角形。

2. 有关弦的问题：作弦心距，想垂径定理。

3. 弧上有中点：中点连接圆心，想垂径定理。

4. 圆周角问题：过角顶点作直径，分别连接直径另一端与角两边的端点，构成两个直角三角形。或连接圆心与圆周角一边的端点，想圆周角定理。

5. 有直径：过两端向圆上一点作弦构成直角。

6. 两圆相交：连公共弦。

7. 两圆相切：过切点引公切线。

8. 弦切角问题：

（注：6，7，8 三条内容 2007 年华东师大版教材未编入）

三、在解其它问题中

1. 给出中点或中线：可以考虑过中点作中位线或把中线延长一倍来解决相关问题。

2. 给出角平分线：可向角的两边作垂线。

3. 给出线段垂直平分线：可向线段两端作连接线。

4. 在比例线段证明中：常作平行线。作平行线时往往是保留结论中的一个比，然后通过一个中间比与结论中的另一个比联系起来。

5. 求证一线段为另一线段的 2 倍或一半：可延长短线段一倍或将长线段平分为两段。

6. 等腰三角形：常作底边中线，想“三线合一”。

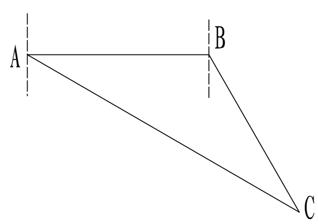
7. 直角三角形：作斜边上的中线，注意它等于斜边的一半。

8. 求证线段相等：可考虑构成全等三角形。

9. 求证线段成比例：可考虑构成相似三角形。

10. 求证命题与题设条件无直接关联时：要考虑作把求证命题与有关题设条件关联起来的辅助线。

例 1．台湾“华航”客机失事后，祖国大陆海上搜救中心立即通知位于 A、B 两处的上海救捞局所属专业救助轮“华意”轮、沪救 12”轮前往出事地点协助搜救．接到通知后，“华意”轮测得出事地点 C 在 A 的南偏东 60°,“沪救 12”轮测得出事地点 C 在 B 的南偏东 30°．已知 B 在 A 的正东方向，且相距 100 海里，分别求出两船到达出事地点 C 的距离．如图．



【**观察与分析**】本题是考查三角函数的应用问题，其实质上是用解直角三角形的知识解斜三角形的问题。读懂题目，弄清与方位有关的词语，是解此题的关键。依题意知△ABC 是顶角为 120° 的等腰三角形，过点 B 作底边上的高，不难求出 BC、AC 的长。

解：作 BD⊥AC，依题意知∠ABC＝120°，∠BAC＝30°，

∴∠C＝180°－120°－30°=30°=∠BAC， BC＝AB＝100 海里。

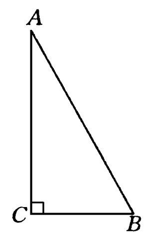
在 Rt△BDC 中，∵∠C＝30°，

∴DC＝BC • Cos30°＝$50\sqrt{3}$.

∴AC＝$100\sqrt{3}$.

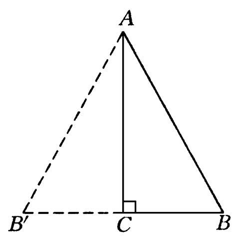
例 2. 已知：在△ABC 中，∠C=90°，∠A=30°，如右上图所示.

求证：BC=$\frac{1}{2}$AB.



> **【观察与分析】**本题实际上是一条几何定理“直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半”的求证。不难看出，只要作出△ABC 关于 AC 的对称图形△AB′C,证明 2BC=AB 即可。

证明：作出△ABC 关于 AC 对称的△AB′C.如右下图所示。



∴AB′=AB.

又∵∠CAB=30°，∴∠B′=∠B=∠B′AB=60°.

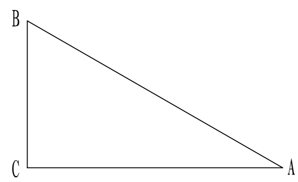
∴AB=BB′=AB′

又∵△AB′C 与△ABC 为对称图形，B′C 与 BC 是对应边

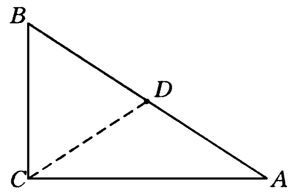
∴BC=B′C=$\frac{1}{2}$BB′=$\frac{1}{2}$AB.

例 3. 如图所示，在△ABC 中，∠B=60°，AB=4，BC=2.求证△ABC 是直角三角形。

> **【观察与分析】**求证△ABC 是直角三角形，只要证明∠BCA=90°即可，也就是要证明∠BCA=∠B+∠A.连接 AB 的中点 D 与顶点 C，可看出△BCD 是一个等边三角形，而△ADC 是一个底角为 30°的等腰三角形。



证明：取 AB 的中点 D，连接 CD.如右图所示。



∵BC=2，AB=4，∴BC=BD=AD=2.

∴∠BCD=∠BDC.

又∵∠B=60°，∴∠BCD=∠BDC=60°.

∴DC=BD=DA. ∴∠A=∠DCA.

又∵∠BDC 是△DCA 的一个外角，

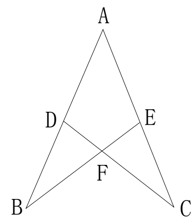
∴∠BDC=∠A+∠DCA=60°.

∴∠A=30°，

∴∠BCA=180°−∠B−∠A=180°−60°−30°=90°.

∴△ABC 是直角三角形.

例 4. 如图，已知：AD=AE，DF=EF；求证：△ADC≌△AEB.



【观察与分析】求证△ADC≌△AEB，已知条件中尚缺两个。只有重构一对全等三角形，来求出所需条件。所以应作辅助线 AF.

证明：连结 AF

∵AD=AE，DF=EF，AF=AF

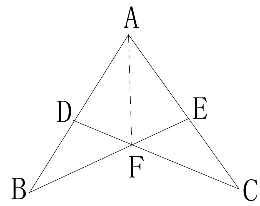
∴△ADF≌△AEF

∴∠ADC=∠AEB，

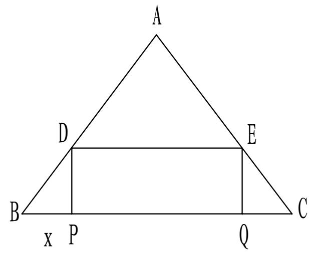
AD=AE

∠DAC=∠EAB

∴△ADC≌△AEB



例 5. 如图，ΔABC 中，$AB=AC=5$，$BC=6$，矩形 $PQED$ 的边 PQ 在线段 BC 上，D、E 分别在 AB、AC 上，设 BP 为 x. 写出矩形 PQED 面积 y 与 x 的函数关系式。



【观察与分析】矩形 PQED 面积 $y=PQ\bullet DP$，要求 PQ、DP 与 x 之间的数量关系，必须作 AH⊥BC，垂足为 H，使△BDP∽△BAH。

解：过 A 作 $AH\perp BC$，H 为垂足(如图)，

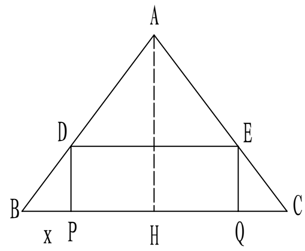
∵AB=AC=5，BH=$\frac{1}{2}$BC=3，∴由勾股定理得：AH=4

∵DP∥AH，∴△BDP∽△BAH，$\frac{DP}{AH}=\frac{BP}{BH}$，即$\frac{DP}{4}=\frac{x}{3}$

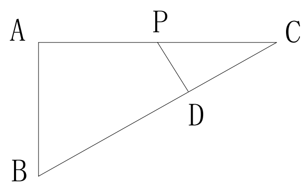
∴ $DP=\frac{4}{3}x$

∵PQ=BC−2BP=6−2x

∴y=PQ·DP=(6−2x)·$\frac{4}{3}x=-\frac{8}{3}x^2+8x(0<x<3)$



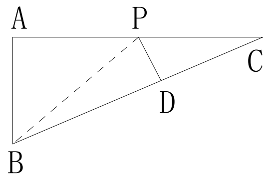
例 6. 如图，在△ABC 中，∠A=90° P 为 AC 边的中点，PD⊥BC，D 为垂足。求证：$BD^2-CD^2=AB^2$



【观察与分析】本题求证的等式，符合直角三角形三边关系公式。只有将 BD、CD、AB 纳入互相关联的直角三角形中，才能进行等量代换。所以连接 BP 是不错的辅助线。

证明：连结 BP，在 Rt△BPD 中，$BD^2= BP^2-PD^2$ ①

在 Rt△CDP 中，$CD^2= PC^2-PD^2$ ②



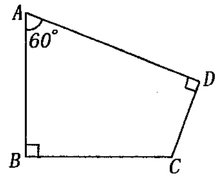
由①－② 得：$BD^2-CD^2 = BP^2-PC^2$

∵ AP=PC　　　∴ $BD^2-CD^2 = BP^2-AP^2$

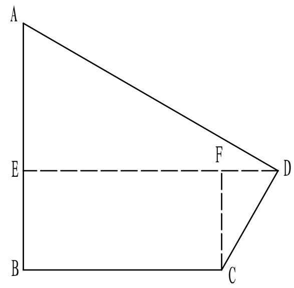
又∵ ∠A=90°　　∴ 在 Rt△ABP 中，$AB^2= BP^2-AP^2$

∴ $BD^2-CD^2= AB^2$

例 7. 某片绿地形状如图所示，其中 AB⊥BC，CD⊥AD，∠A=60°，AB=200m，CD=100m，　求 AD、BC 的长。



> **【观察与分析】**求线段长的问题，常需要化为解直角三角形的问题。本题只要设法构成含 60° 的直角三角形再求解即可。



解：作 DE⊥AB，垂足为 E；CF⊥DE，垂足为 F.

∵∠A=60°，CD⊥AD，∴CDE=60°

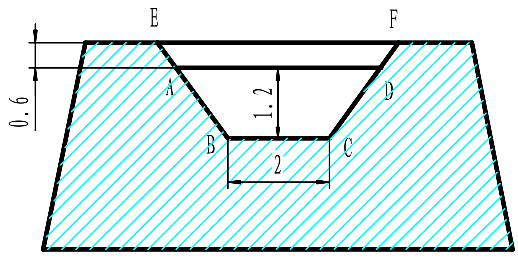
∴$DF=\frac{1}{2}CD=50m$，　$CF=\sqrt{3}DF=50\sqrt{3}m$.

∴$AE=200-50\sqrt{3}$，$AD=2AE=400-100\sqrt{3}$

例 8. 为了农田灌溉的需要，某乡利用一土堤修筑一条渠道，　在堤中间挖出深为 1.2 米，下底宽为 2 米，坡度为 1:0.8 的渠道（其横断面为等腰梯形），并把挖出来的土堆在两旁，使土堤高度比原来增加了 0.6 米（如图所示）求：

（1）渠面宽 EF；

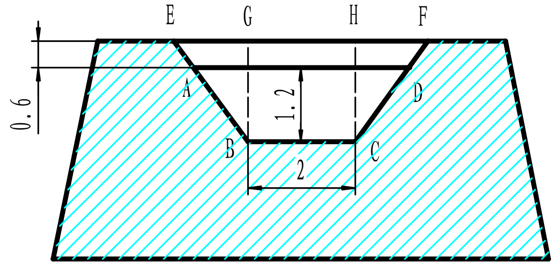
（2）修 200 米长的渠道需挖的土方数.



> **【观察与分析】**解决渠道、堤坝、燕尾槽、燕尾等这一类问题，实质上就是解等腰梯形问题。常分为一个矩形和两个直角三角形研究。

解：(1)作 BG⊥EF，垂足为 G，CH⊥EF，垂足为 H，则 BG=CH=1.2+0.6=1.8(m)

∵坡度为 1:0.8，即 $\frac{BG}{EG}=\frac{1}{0.8}$



∴EG=FH=BG×0.8=1.8×0.8=1.44(m).

∴EF=1.44×2+2=4.88(m).

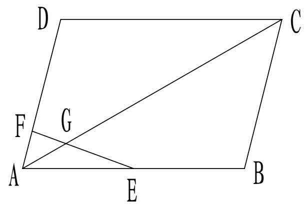
(2)用解(1)的方法可求出 AD=3.92m.

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(BC+AD)\times1.2=\frac{1}{2}(2+3.92)\times1.2=3.552(m^2)$.

V=S_{ABCD}×200=3.552×200=710.4(m^3).

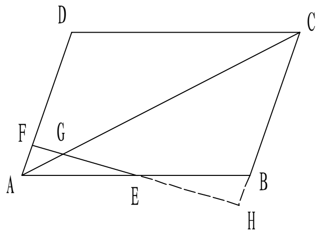
答：渠面宽 4.88 米。修 200 米长的渠道需挖的土方 710.4 米^3。

例 9. 如图,平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，G 是 AC 上一点，$AG:GC=1:5$，连 EG 延长交 AD 于 F，求 $\frac{DF}{FA}$ 的值.



【观察与分析】求线段之间比值，常需化为相似三角形问题来解决。延长 FE、CB 交于 H 后，不难看出△FAE≌△HBE，△FAG∽△HCG。从 CG=5AG，可知 CH=5BH，从而求得 DF:FA=3。

解：延长 FE、CB 交于 H(如图)



∵AE=EB，∠FAE=∠HBE，∠FEA=∠HEB

∴△FAE≌△HBE，AF=BH

设 FA=a，则 HB=a

在 △FAG 和△HCG 中，

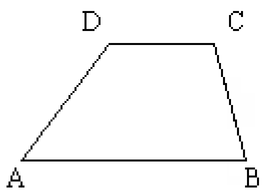
∵三个对应角分别相等

∴ △FAG∽△HCG，$\frac{AG}{GC}=\frac{FA}{CH}=\frac{1}{5}$，得 CH=5FA=5a，DA=CB=CH－BH=4a，DF=3a

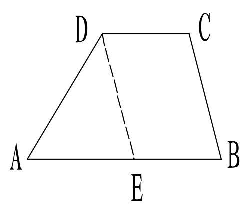
∴ $\frac{DF}{FA}=3$.

例 10. 已知:如图,梯形 ABCD 中,CD//AB,∠A=40°，∠B=70°.

求证：AD=AB—DC.



【观察与分析】求证：AD=AB－DC，就需将 DC 移到 AB 上。作 DE∥CB，只要证明 AD=AE 即可。



证明：作 DE∥CB(见右图) ∵CD∥AB ∴四边形 CDEB

是平行四边形，EB=DC.

∵∠A=40°，∠B=70°．∴∠DEA=∠B=70°．

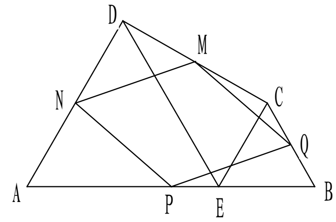
∠ADE=180°－40°－70°=70°

∴∠ADE=∠BED　AD=AE

∴AD=AB－EB=AB－DC

例 11. 如图，在四边形 *ABCD* 中，*E* 为 *AB* 上一点，△*ADE* 和△*BCE* 都是等边三角形，*AB*、*BC*、*CD*、*DA* 的中点分别为 *P*、*Q*、*M*、*N*，试判断四边形 *PQMN* 为怎样的四边形，并证明你的结论.

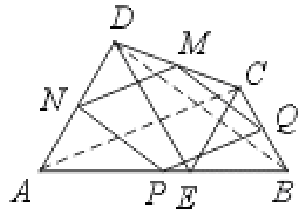
> **【观察与分析】** 直观感觉四边形 PQMN 是一个菱形。要证明，先得证明它是平行四边形，然后证明邻边相等。这就需要在四边形 ABCD 中构造三角形，用三角形中位线定理来证明。



解：四边形 PQMN 为菱形，证明如下：

连接 AC、BD，

∵　PQ 为△ABC 的中位线，∴PQ∥AC，且 PQ=$\frac{1}{2}$AC



同理：MN∥AC，且 MN=$\frac{1}{2}$AC，∴PQ∥MN，且 PQ=MN

∴　四边形 PQMN 为平行四边形

在△AEC 和△DEB 中，

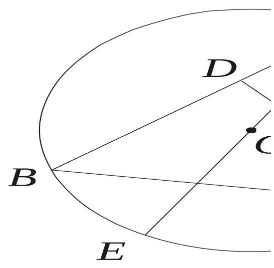
AE＝DE，EC＝EB，∠AED＝60°＝∠CEB，

即　∠AEC＝∠DEB. ∴ △AEC≌△DEB. ∴　AC＝BD.

∴ PQ＝$\frac{1}{2}$AC＝$\frac{1}{2}$BD＝PN，∴　▱PQMN 为菱形。

例 12. 如图，已知⊙O 是△ABC 的外接圆，CD 是 AB 边上的高，AE 是⊙O 的直径. 求证：AC·BC=AE·CD.

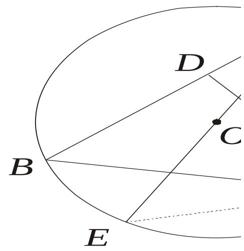
> **【观察与分析】** 根据比例性质知，求证 AC·BC=AE·CD 就是求证 $\frac{AE}{BC}=\frac{AC}{CD}$，这就需要构成相似三角形。连接 EC 则一目了然。



证明：连结 EC(如右下图)，∴∠B=∠E.

∵AE 是⊙O 的直径，∴∠ACE=90°.

∵CD 是 AB 边上的高，∴∠CDB=90°.



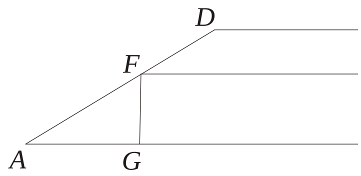
在△AEC与△CBD中，∠E =∠B，∠ACE=∠CDB，

∴△AEC∽△CBD.

∴$\frac{AE}{BC}=\frac{AC}{CD}$，

即AC·BC=AE·CD.

例13. 如图,在直角梯形ABCD中,AB∥CD,∠ABC=90°，AB=2a，CD=a，BC=2，四边形BEFG是矩形，点E、F分别在腰BC、AD上，点G在AB上.设FG = x，矩形BEFG的面积为y.



（1）求y关于x的函数关系式；

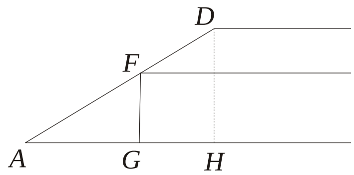
（2）当矩形BEFG的面积等于梯形ABCD的面积的一半时，求x的值；

（3）当∠DAB=30°时，矩形BEFG是否能成为正方形，若能，求其边长；若不能，请说明理由.

> **【观察与分析】**这是一个动态题型。(1)需求出EF，即AB－AG，则先要求AG，作DH⊥AB构成两相似三角形即可。(2)只是等量代换，看似简单，关键是一元二次函数式变一元二次方程。(3)能不能成正方形，就看EF是否等于FG。

解：（1）过点D作DH⊥AB于H.

∵在矩形BEFG中，FG⊥AB，∴FG∥DH.



∴△AGF∽△AHD，

∴$\frac{AG}{AH}=\frac{FG}{DH}$.

即$\frac{AG}{2a-a}=\frac{x}{2}$，得$AG=\frac{ax}{2}$，

∴$BG=AB-AG=2a-\frac{ax}{2}=\frac{4a-ax}{2}$.

∴$y=FG\bullet BG=x\bullet\frac{4a-ax}{2}=-\frac{1}{2}ax^2+2ax$，

即所求的函数关系式为$y=-\frac{1}{2}ax^2+2ax\left(0<x\le 2\right)$.

（2）依题意，得$-\frac{1}{2}ax^2+2ax=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(a+2a\right)\times 2$，

∵a≠0，解以上方程得，$x_1=1$，$x_2=3$.

∵0＜x≤2，∴x_2舍去，取x=1.

故当矩形BEFG的面积等于梯形ABCD的面积的一半时，x的值为1.

（3）矩形 BEFG 不能成为正方形.

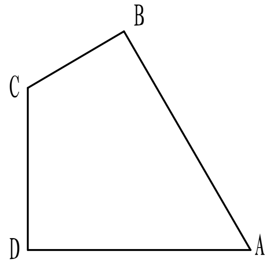
在 Rt△AHD 中，∵∠DAH=30°，∴ $\tan 30° = \frac{DH}{AH} = \frac{2}{a}$，即 $a = 2\sqrt{3}$

∵ $EF > CD = a = 2\sqrt{3} > 2$，即 EF＞2.

又∵0＜x≤2，即 0＜FG≤2，∴EF＞FG，

因此矩形 BEFG 不能成为正方形.

例 14. 如图，在四边形 ABCD 中，∠A=60°，∠B=∠D=90°，BC=2，CD=3，求 AB.



> **【观察与分析】**本题与例 7 相类似，也可用例 7 的解法。但还可延长 AB 与 DC 相交于 E，构成两相似三角形来解决。

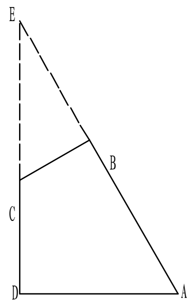
解：延长 AB、DC 相交于点 E，则∠E=30°

∴△ECB∽△EAD

∵EC=2BC=4，EB=EC・cos30° $=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

∴ED=EC+CD=4+3=7，EA= $\frac{ED}{\cos 30°} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14}{3}\sqrt{3}$

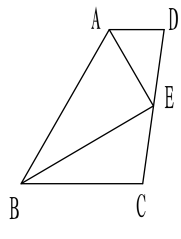
∴AB=EA－EB= $\frac{14}{3}\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$



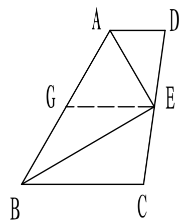
例 15. 如右上图所示，在四边形 ABCD 中，

AD∥BC，AB=AD+BC，E 是 CD 的中点，

求证：AE、BE 分别是∠BAD 和∠ABC 的角平分线。



> **【观察与分析】**四边形是梯形，已有一腰的中点，首先应想到作中位线 EG，得到 GE=GA=GB，通过角度转化可证。另外，延长 AE 交 BC 的延长线于 F，利用“SSS”证明△ADE≌△FCE 亦可。



证明一：取 AB 中点 G，连结 EG（见右下图），则 EG= $\frac{1}{2}(AD+BC)$

∵AB=AD+BC，∴EG=$\frac{1}{2}AB=AG=GB$

∴∠ABE=∠GEB，∠BAE=∠GEA

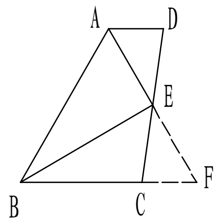
又∵AD∥BC，EG是中位线，

∴EG∥AD，EG∥BC，

∴∠EBC=∠GEB，∠DAE=∠GEA

∴∠EBC=∠ABE，∠DAE=∠BAE，即AE、BE分别是∠BAD和∠ABC的角平分线。

证明二：延长AE交BC的延长线于F(见右图)，



∵E是CD的中点，即CE=DE，

又∵AD∥BC，∴∠D=∠ECF

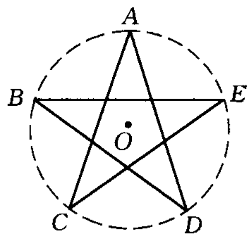
在△ADE和△FCE中，$\begin{cases} CE=DE \\ \angle D=\angle ECF \\ \angle DEA=\angle CEF \end{cases}$，

∴△ADE≌△FCE，AD=CF

∴AB=AD+BC=BC+CF=BF，∠BAF=AFB=∠DAF

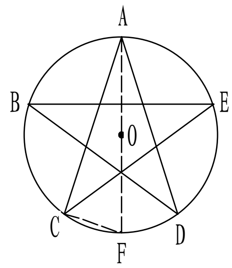
同理，可证∠ABE=∠EBC

例16. 如图是五角星，已知AC＝a，求五角星外接圆的直径(结果用含三角函数的式子表示)。



【观察与分析】本题较容易，只要过一个顶点作直径，构成直角三角形，即可求解。

解：连接AO并延长交⊙O于F，连接CFM(见右下图)，



则∠ACF=90°

∵A、B、C、D、E是⊙O的五等分点，

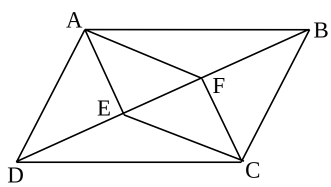
∴∠CAD=$\frac{1}{5}\times 180°=36°$

∠CAF=$\frac{1}{2}$∠CAD=18°

在Rt△ACF中，AC=a，

∴AF=$\frac{AC}{\cos\angle CAF}=\frac{a}{\cos 18°}$

例17. 如图，在平行四边形ABCD中，AE⊥BD于E，CF⊥BD于F，四边形AECF是平行四边形吗？为什么？



解：是。证明如下：

连结 AC 交 BD 于 O

∵四边形 ABCD 为平行四边形，AC、BD 为对角线

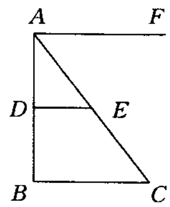
∴AO=CO

又∵AE⊥BD　CF⊥BD　∴∠AEF=∠CFE=90°，

∵∠AOE=∠COF　∴△AOE≌△FOC　∴EO=FO

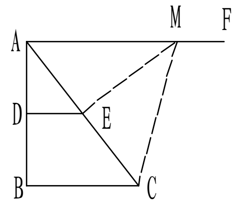
∴四边形 AECF 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形）

例 18. 如图所示，DE 是△ABC 的中位线，∠B=90°，AF∥BC，在射线 AF 上是否存在点 M，使△MEC∽△ADE？若存在，请先确定 M，再说明这两个三角形相似；若不存在，请说明理由.



【观察与分析】要与△ADE 相似，首先必须是直角三角形，所以过点 E 作 AC 的垂线可以一试。

解：存在，过点 E 作 AC 的垂线与 AF 交于一点 M 即是，证明如下：连接 MC，在△MEC 和△ADE 中，∠ADE=∠MEC=90°，



∵MC=MA，DE∥BC

∴∠MCE=∠MAE=∠AED,

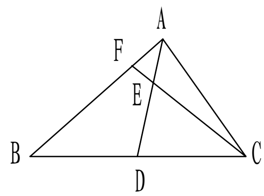
∴△MEC∽△ADE

例 19. 如图（1），已知，AD 是ΔABC的中线，E 是 AD 上一点，连结 CE 并延长交 AB 于点 F。

（1）若 E 是 AD 的中点，则$\frac{AF}{BF}=$________；

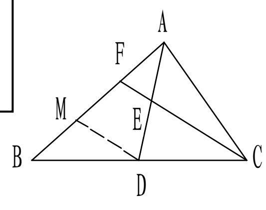
（2）若 AE：ED=$\frac{1}{2}$，则$\frac{AF}{BF}=$________；

（3）若 AE：ED=$\frac{1}{n}$，则$\frac{AF}{BF}=$________；



(1)

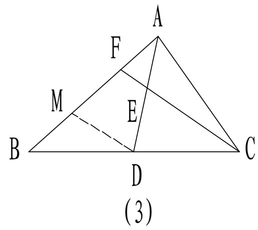
【观察与分析】(1)作 DM//CF，用中位线将 AB 分为相等的三段；(2)同样作 DM//CF，但构成相似三角形；(3)用类比法推出结论。



(2)

解：（1）如图（2），作 DM//CF，交 AB 于点 M，EF 为ΔADM的中位线，得 AF=FM，DM 为ΔBCF的中位线，得 BM=MF。可知$AF\ \ FB=\frac{1}{2}$。

（2）如图(3)，作 DM//CF，交 AB 于点 M，易知，$\Delta AFE\backsim\Delta ADM$，

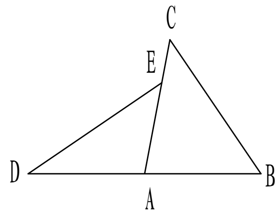


(3)

得 $\dfrac{AF}{FM}=\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{1}{2}$。又 DM 为 ΔBCF 的中位线，得 DM=FM，$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{AF}{2FM}=\dfrac{1}{4}$

（3）类比于（1）和（2），应有 $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{1}{2n}$（可有与（2）类似的推演过程）

例 20. 已知，如图，D 是 ΔABC 的边 BA 延长线上一点，有 AD=BA，E 是边 AC 上一点，且 DE=BC　　求证：$\angle DEA=\angle C$

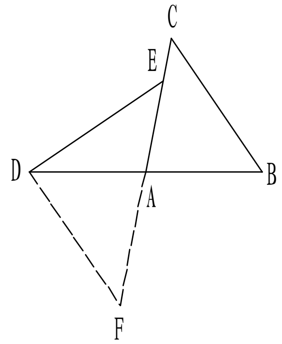


【观察与分析】比较两个角大小，最好通过等量代换，放在一个三角形(四边形)中研究。如本题，延长 CA 到 F，使 FA=CA，连结 FD，构成一对全等三角形完成这一转换。

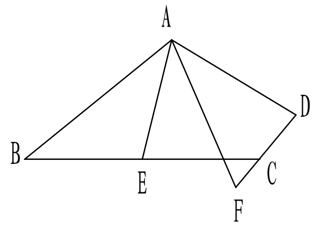
证明：如右图，延长 CA 到 F，使 FA=CA，连结 FD，

∵AD=BA，∠CAB=∠FAD　∴ $\Delta AFD\cong\Delta ACB$，DF=BC=DE，

∴ $\angle C=\angle F=\angle DEA$



例 21. 如图，在四边形 ABCD 中，AB//CD，E 为 BC 边的中点，$\angle BAE=\angle EAF, AF$ 与 DC 的延长线相交于点 F，试探究线段 AB 与 AF，CF 之间的等量关系，并证明你的结论。

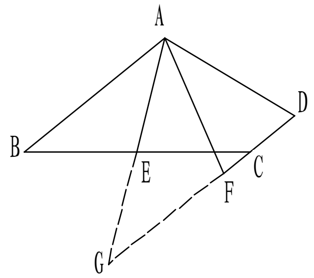


【观察与分析】中线延长一倍构成一对全等三角形，是常用添辅助线方法之一。将 ABC 看作三角形，AE 就是 BC 上的中线。

解：猜想 AB=AF+CF.证明如下：

延长 AE 到 G，使 EG=EA，连结 CG(如右图)，

在△ABE 和△GCE 中，$\begin{cases}\mathrm{BE}=\mathrm{EC}\\ \mathrm{AE}=\mathrm{EG}\\ \angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{CEG}\end{cases}$，



∴△ABE≌△GCE，AB=GC，∠ABC=GCB

∴CG∥AB.

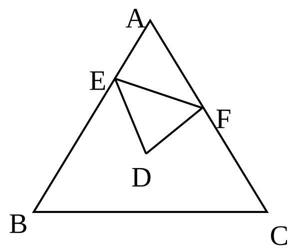
又∵AB∥CD，∴F 在 GC 上。

另∵∠BAE=∠EAF

∴∠G=∠BAG=∠GAF，AF=GF

∴AB=GC=GF+CF=AF+CF

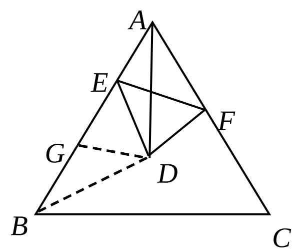
例 22. 如图，已知，点 D 是边长为 1 的等边三角形 ABC 的内心，点 E，F 分别在边 AB，AC 上，且满足 $\angle EDF = 60°$。求 ΔAEF 的周长。



【观察与思考】ΔAEF 的三边的长不可能通过分别计算求得，因此，第一个想法就是把它的三条边等长转化到同一条直线上，利用等边三角形 120° 的旋转对称性，先把 AF 转化到 AB 上，为此，连结 DA（注意到点 D 就是 ΔABC 的中心），如图（1`）作变换：

$$\triangle ADF \xrightarrow[\text{旋转 }120°\text{ 角}]{\text{绕点 D 逆时针}} \text{重合到}\triangle BDG.$$

当然就有 AF=BG。在这种情况下，又诱发我们看到 $\Delta DEF \cong \Delta DEG$，即有 EF=EG，这时就可以看出，$\Delta AEF$ 的周长应当等于 ΔABC 的一条边长。



解：如图（1`），连结 DA，DB，并在 BA 上截取 BG=AF，连结 DG，

在 $\Delta ADF \cong \Delta BDG$ 中，

$AF = BG, AD = BD, \angle DAF = \angle DBG = 30°$（因为 D 为 ΔABC 的内心）

$\because \Delta ADF \cong \Delta BDG, \therefore DF = DG, \angle ADF = \angle BDG.$

在 ΔDEF 和 ΔDEG 中，DE 公用，DF=DG，$\angle EDF = 60°$，而

$$\angle EDG = \angle ADB - \angle ADE - \angle BDG$$
$$= 120° - (\angle ADE + \angle ADF) = 120° - \angle EDF = 120° - 60° = 60°$$

$\therefore \Delta DEF \cong \Delta DEG, \therefore EF = EG$

$\therefore \Delta AEF$ 的周长 $= AE + EF + AF = AE + EG + BG = AB = 1$