上海市浦东新区2012届高三第二学期4月质量抽测

数学（文科）

一、填空题（本大题满分 56 分）本大题共有 14 题，考生应在答题纸编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得 4 分，否则一律得零分.

1．抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标是____________. $(1,0)$

2．复数 $z=\dfrac{1}{1+i}$（其中 i 是虚数单位），则 $\overline{z}$ =_____ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{3^{n+1}-2^n}=$___ $\dfrac{1}{3}$ ___.

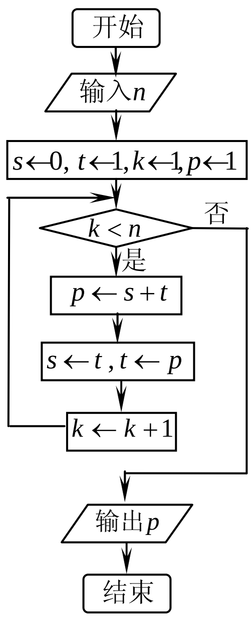
4. 向量 $\vec{a}=(3,4)$ 在向量 $\vec{b}=(1,0)$ 方向上的投影为______. 3

5．若集合 $A=\{x\left|x^2-5x+6\le 0\right.\}$，集合 $B=\{x\left|ax-2=0,a\in Z\right.\}$，且 $B\subseteq A$，则 a =__0 或 1_.

6. 已知三个球的表面积之比是 $1:2:3$，则这三个球的体积之比为______ $1:2\sqrt{2}:3\sqrt{3}$

7. 在△ ABC 中，若 $b=1$，$c=\sqrt{3}$，$\angle C=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $S_{\Delta ABC}=$ _______. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

8. 已知实数 x、y 满足不等式组 $\begin{cases}x+y\le 5\\ 2x+y\le 6\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$，则 $z=3x+4y$ 的最大值是_____. 20



9．甲、乙两位旅行者体验城市生活，从某地铁站同时搭上同一列车，分别从前方 10 个地铁站中随机选择一个地铁站下车，则甲、乙两人不在同一站下车的概率是________. $\dfrac{9}{10}$

10．执行右面的程序框图，如果输入的 n 是 4，则输出的 P=____. 3

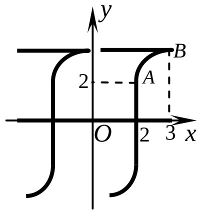
11．直线 $y=x+m$ 与曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有两个交点，则实数 m 的取值范围是___. $1\le m<\sqrt{2}$

12．已知数列 $\left\{a_n\right\}$ $(n\in \mathrm{N}^*)$，首项 $a_1=\dfrac{5}{6}$，若二次方程 $a_nx^2-a_{n+1}x-1=0$ 的根 α、β 满足 $\alpha-\alpha\beta+\beta=1$，则数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=$ _____________. $-\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{4}{3}n$

13．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若存在常数 $m>0$，对任意 $x\in R$，有 $\left|f(x)\right|\le m\left|x\right|$，则称函数 $f(x)$ 为 $F-$函数. 给出下列函数：① $f(x)=x^2$；② $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$；③ $f(x)=2^x$；

④ $f(x)=\sin 2x$. 其中是 $F-$函数的序号为________________.（答案：②④）

14．手机产业的发展催生了网络新字“孖”. 某学生准备在计算机上作出其对应的图像，其中 $A(2,2)$，如图所示. 在作曲线段 AB 时，该学生想把函数 $y=x^{\frac{1}{2}},x\in[0,2]$ 的图像做适当变换，得到该段函数曲线. 请写出曲线段 AB 在 $x\in[2,3]$ 上对应的函数解析式________. $y=\sqrt{2}(x-2)^{\frac{1}{2}}+2$



二、选择题（本大题满分 20 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分.

15．已知非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，“函数 $f(x)=(\vec{a}x+\vec{b})^2$ 为偶函数”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的　（ C ）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分也非必要条件

16．设 z_1、z_2 为复数，下列命题一定成立的是（　）D

A. 如果 $z_1^{\ 2}+z_2^2=0$，那么 $z_1=z_2=0$　　B. 如果 $|z_1|=|z_2|$，那么 $z_1=\pm z_2$

C. 如果 $|z_1|\le a$，a 是正实数，那么 $-a\le z_1\le a$　　D. 如果 $|z_1|=a$，a 是正实数，那么 $z_1\cdot\overline{z_1}=a^2$

17．若双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{a_1^2}-\dfrac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>0,b_1>0)$ 和双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1(a_2>0,b_2>0)$ 的焦点相同，且 $a_1>a_2$ 给出下列四个结论：

① $a_1^2-a_2^2=b_2^2-b_1^2$；　② $\dfrac{a_1}{a_2}>\dfrac{b_2}{b_1}$；

③ $b_1<b_2$；　④ $a_1+a_2>b_1+b_2$；

其中所有正确的结论序号是（　）B

A. ①②　B, ①③　C. ②③　D. ①④

18．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x,0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ 2-2x,\dfrac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$，且 $f_1(x)=f(x)$，$f_2(x)=f(f_1(x))$. 则满足方程 $f_2(x)=x$ 的根的个数为（　）C

A、0 个　B、2 个　C、4 个　D、6 个

三、解答题（本大题满分 74 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸相应编号规定的区域内写出必要的步骤.

19.（本题满分 12 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 6 分.

已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x$，

（1）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）将函数 $y=f(x)$ 图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位后，得到函数 $y=g(x)$ 的图像，求方程 $g(x)=1$ 的解.

【解答】（1） $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$，

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$ 得：

$f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[k\pi-\frac{3\pi}{8},k\pi+\frac{\pi}{8}\right](k\in Z)$；

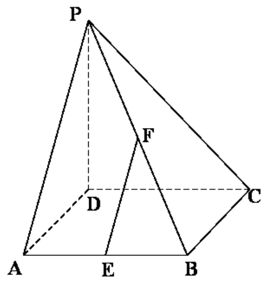
（2）由已知，$g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$，

由 $g(x)=1$，得 $\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$，

$\therefore x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$，$(k\in Z)$.

20.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形，$PD=DA$，E，F 分别是 AB，PB 的中点.



（1）求异面直线 EF 与 PD 所成角的大小；

（2）当 $EF=\sqrt{2}$ 时，求在四棱锥 $F-ABCD$ 的体积.

【解答】⑴ $\because E$，F 分别是 AB，PB 的中点，

$\therefore EF // AP$.

$\therefore \angle APD$ 为异面直线 EF 与 PD 所成的角或补角.

$\because PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD=DA$

$\therefore \Delta ADP$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle APD=45^\circ$，

$\therefore$异面直线 EF 与 PD 所成角的大小为 45°.

⑵ 解：由⑴知，$EF=\frac{1}{2}AP$，且 $EF=\sqrt{2}$，$\therefore$ $AP=2\sqrt{2}$.

又由题意知，ΔPAD 为等腰直角三角形，$\therefore$ $PD=AD=2$.

又$\because$ 点 F 为 PB 的中点，$\therefore$ 点 F 到底面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{1}{2}PD=1$.

$\therefore$ 四棱锥 $F-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times 2\times 2\times 1=\frac{4}{3}$.

21.（本大题满分 14 分）本大题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满 5 分，第 3

小题满 5 分.

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、F_2，长轴的一个端点与短轴两个端点组成等边三角形的三个顶点，直线 l 经过点 F_2，倾斜角为 $45°$，与椭圆交于 A 、B 两点.

（1）若 $|F_1F_2|=2\sqrt{2}$，求椭圆方程；

（2）对（1）中椭圆，求 ΔABF_1 的面积；

（3）M 是椭圆上任意一点，若存在实数 λ,μ，使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，试确定 λ,μ 的关系式.

【解答】（1）由已知，可得 $c=\sqrt{2}$， $a=\sqrt{3}b$，

$\because a^2=b^2+c^2$，$\therefore a=\sqrt{3}$， $b=1$，

$\therefore \frac{x^2}{3}+y^2=1$.

（2）设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，直线 $l:y=x-\sqrt{2}$，

代入椭圆方程得 $4x^2-6\sqrt{2}\,x+3=0$， $x_1+x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}$， $x_1x_2=\frac{3}{4}$，

$|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{6}}{2}$， $|y_1-y_2|=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore S_\Delta=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{3}$.

（3）由已知椭圆方程为 $x^2+3y^2=3b^2$ ①，

右焦点 F 的坐标为 $(\sqrt{2}b,0)$，

直线 AB 所在直线方程为 $y=x-\sqrt{2}b$ ②，

由①②得：$4x^2-6\sqrt{2}bx+3b^2=0$，

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}b$， $x_1x_2=\frac{3b^2}{4}$，

设 $M(x,y)$，由 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ 得，

$x=\lambda x_1+\mu x_2$， $y=\lambda y_1+\mu y_2$，

∵点 M 在椭圆上，

∴ $(\lambda x_1+\mu x_2)^2+3(\lambda y_1+\mu y_2)^2=3b^2$，

整理得：$\lambda^2(x_1^2+3y_1^2)+\mu^2(x_2^2+3y_2^2)+2\lambda\mu(x_1x_2+3y_1y_2)=3b^2$，

$x_1x_2+3y_1y_2=x_1x_2+3(x_1-\sqrt{2}b)(x_2-\sqrt{2}b)=4x_1x_2-3\sqrt{2}b(x_1+x_2)+6b^2=0$ ③，

又点 A,B 在椭圆上，故 $x_1^2+3y_1^2=3b^2$ ④， $x_2^2+3y_2^2=3b^2$ ⑤，

由③④⑤式得 $\lambda^2+\mu^2=1$.

22.（本大题满分 16 分）本大题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满 6 分，第 3 小题满 6 分.

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n． 已知向量 $\vec{a}=\left(\cos\dfrac{n\pi}{3}+\sin\dfrac{n\pi}{3},1\right)$ $(n\in\mathrm{N}^*)$ 和 $\vec{b}=\left(a_n,\cos\dfrac{n\pi}{3}-\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)$ $(n\in\mathrm{N}^*)$ 满足 $\vec{a}//\vec{b}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求 S_{30}；

（3）设 $b_n=na_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和为 T_n.

【解答】（1）∵ $\vec{a}//\vec{b}$

∴ $a_n=\left(\cos\dfrac{n\pi}{3}+\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)\left(\cos\dfrac{n\pi}{3}-\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)$

$=\cos^2\dfrac{n\pi}{3}-\sin^2\dfrac{n\pi}{3}$

$=\cos\dfrac{2n\pi}{3}$

∴ $a_n=\cos\dfrac{2n\pi}{3}$；

（2）数列 $\{a_n\}:-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,\cdots$ 为周期为 3 的周期数列且 $a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}=0\left(k\in\mathrm{N}^*\right)$.

故 $S_{30}=0$.

（3）$b_n=na_n=n\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

当 $n=3k\left(k\in N^*\right)$ 时，

∵ $b_{3k-2}+b_{3k-1}+b_{3k}=(3k-2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(3k-1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3k\cdot 1=\dfrac{3}{2}$.

∴ $T_n=T_{3k}=\dfrac{3}{2}k=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{n}{3}=\dfrac{n}{2}$；

当 $n=3k-1\left(k\in N^*\right)$ 时，

$$T_n=T_{3k-1}=T_{3k}-b_{3k}=\frac{3}{2}k-3k\cdot 1=-\frac{3}{2}k=-\frac{3}{2}\cdot\frac{n+1}{3}=-\frac{n+1}{2};$$

当 $n=3k-2\left(k\in N^*\right)$ 时，

$$T_n=T_{3k-2}=T_{3k}-b_{3k}-b_{3k-1}=\frac{3}{2}k-3k-(3k-1)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}k+\frac{3k-1}{2}=-\frac{1}{2};$$

故 $T_n=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & (n=3k),\\ -\dfrac{n+1}{2}, & (n=3k-1)\\ -\dfrac{1}{2}, & (n=3k-2).\end{cases},\left(k\in N^*\right).$

23、（本大题满分 18 分）本大题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满 6 分，第 3 小题满 8 分.

已知函数 $y=f(x), x\in D$，如果对于定义域 D 内的任意实数 x，对于给定的非零常数 m，总存在非零常数 T，恒有 $f(x+T)>m\cdot f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 是 D 上的 m 级类增周期函数，周期为 T. 若恒有 $f(x+T)=m\cdot f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 是 D 上的 m 级类周期函数，周期为 T.

（1）试判断函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ 是否为 $(3,+\infty)$ 上的周期为 1 的 2 级类增周期函数？并说明理由；

（2）已知函数 $f(x)=-x^2+ax$ 是 $[3,+\infty)$ 上的周期为 1 的 2 级类增周期函数，求实数 a 的取值范围；

（3）下面两个问题可以任选一个问题作答，问题（Ⅰ）6 分，问题（Ⅱ）8 分，如果你选做了两个，我们将按照问题（Ⅰ）给你记分.

（Ⅰ）已知 $T=1$，$y=f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上 m 级类周期函数，且 $y=f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递增函数，当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=2^x$，求实数 m 的取值范围.

（Ⅱ）已知当 $x\in[0,4]$ 时，函数 $f(x)=x^2-4x$，若 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上周期为 4 的 m 级类周期函数，且 $y=f(x)$ 的值域为一个闭区间，求实数 m 的取值范围.

【解答】

（1）$\because (x+1-1)-(x-1)^2=-(x^2-3x+1)<0$，即 $(x+1-1)<(x-1)^2$

$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(x+1-1)>\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2$，即 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1-1)>2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

即 $f(x+1)>2f(x)$ 对一切 $x\in(3,+\infty)$ 恒成立，

故 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ 是 $(3,+\infty)$ 上的周期为 1 的 2 级类增周期函数.

（2）由题意可知： $f(x+1)>2f(x)$，

即 $-(x+1)^2+a(x+1)>2(-x^2+ax)$ 对一切 $[3,+\infty)$ 恒成立，

$(x-1)a<x^2-2x-1$，

∵ $x\ge 3$

∴ $a<\dfrac{x^2-2x-1}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2-2}{x-1}=(x-1)-\dfrac{2}{x-1}$，

令 $x-1=t$，则 $t\in[2,+\infty)$，

$g(t)=t-\dfrac{2}{t}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(t)_{\min}=g(2)=1$，

所以 $a<1$.

（3）问题（Ⅰ）∵ $x\in[0,1)$ 时， $f(x)=2^x$，

∴当 $x\in[1,2)$ 时， $f(x)=mf(x-1)=m\cdot 2^{x-1}$，

当 $x\in[n,n+1)$ 时， $f(x)=mf(x-1)=m^2f(x-2)=\cdots=m^nf(x-n)=m^n\cdot 2^{x-n}$，

即 $x\in[n,n+1)$ 时， $f(x)=m^n\cdot 2^{x-n}$， $n\in\mathrm{N}^*$，

∵ $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

∴ $m>0$ 且 $m^n\cdot 2^{n-n}\ge m^{n-1}\cdot 2^{n-(n-1)}$，

即 $m\ge 2$.

问题（Ⅱ）：∵当 $x\in[0,4]$ 时， $y\in[-4,0]$，且有 $f(x+4)=mf(x)$，

∴当 $x\in[4n,4n+4],n\in Z$ 时，

$f(x)=mf(x-4)=\cdots=m^nf(x-4n)=m^n\left[(x-4n)^2-4(x-4n)\right]$，

当 $0<m\le 1$ 时， $f(x)\in[-4,0]$；

当 $-1<m<0$ 时， $f(x)\in[-4,-4m]$；

当$m=-1$时，$f(x)\in[-4,4]$；

当$m>1$时，$f(x)\in(-\infty,0]$；

当$m<-1$时，$f(x)\in(-\infty,+\infty)$；

综上可知：$-1\le m<0$或$0<m\le 1$.