

4.函数与方程的思想

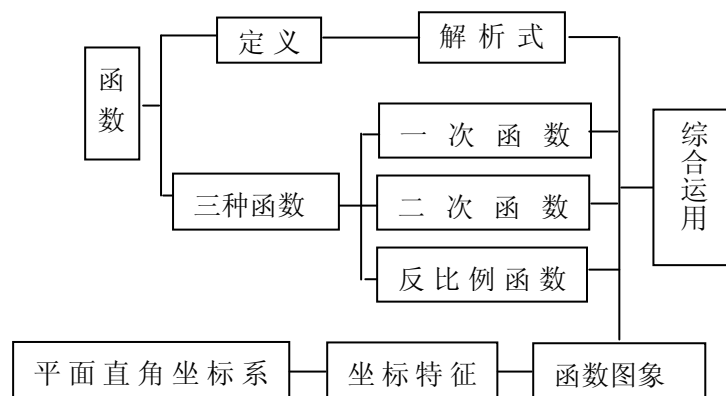
函数思想就是用运动、变化的观点分析和研究现实中的数量关系，通过问题所提供的数量特征及关系建立函数关系式，然后运用有关的函数知识解决问题。如果问题中的变量关系可以用解析式表示出来，则可将关系式看作一个方程，通过对方程的分析使问题获解。

所谓方程的思想，就是突出研究已知量与未知量之间的等量关系，通过设未知数、列方程或方程组，解方程或方程组等步骤，达到求值目的的解题思路和策略，它是解决各类计算问题的基本思想，是运算能力的基础。函数与方程思想是中学数学中最常用、最重要的数学思想。

中考函数试题解法及新颖题目研究

函数是初中代数的重点，也是难点，在中考的代数部分所占比重最大，综合题中离不开函数内容。中考函数考察的重点是：函数自变量取值范围，正反比例函数、一次函数、二次函数的定义和性质，画函数图像，求函数表达式。近年来中考比较侧重实际应用问题的考察。中考的最后一道题，常常要用到多个数学思想方法，纵观近几年的中考题，基本上都是函数、方程、几何（主要是圆）的综合题。

1. 初中函数知识网络



2. 命题思路与知识要点：

2. 1一般函数

2. 1. 1考查要点：平面直角坐标系的有关概念；常量、变量、函数的意义；函数自变量的取值范围和函数值的意义及确定。

2. 1. 2考纲要求：理解平面直角坐标系的有关概念，掌握各象限及坐标轴上的点的坐标特征，会求对称点坐标，能确定函数自变量的取值范围。

2. 1. 3主要题型：填空题，选择题，阅读理解题。

2. 1. 4知识要点：

(1) 平面直角坐标系中，每一个点都与有序实数对一一对应；象限与坐标符号如图 1。

(2) 特殊位置上点的坐标特点：

①点 $P(x, y)$ 在 x 轴上 $\Leftrightarrow y=0$;

点 $P(x, y)$ 在 y 轴上 $\Leftrightarrow x=0$;

②点 $P(x, y)$ 在第一、三象限角平分线上 $\Leftrightarrow x=y$;

点 $P(x, y)$ 在第二、四象限角平分线上 $\Leftrightarrow x+y=0$;

③点 $P(x, y)$ 关于 x 轴对称的点的坐标是 $(x, -y)$;

点 $P(x, y)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是 $(-x, y)$;

点 $P(x, y)$ 关于原点对称的点的坐标是 $(-x, -y)$;

确定函数自变量取值范围，就是要找出使函数有意义的自变量的全部取值。一般从以下几方面考虑：

(1) 解析式型：函数直接由解析式给出，不涉及其它问题。主要有以下五种情况：①整式型：自变量的取值范围是全体实数；②分式型：自变量的取值范围是使分母不为零的实数；③二次根式型：自变量的取值范围是使被开方式为非负数的实数；④零指数和负指数型：自变量的取值范围是使底数不为零的实数。⑤综合型：自变量的取值范围是使各部分有意义的公共部分。

(2) 具体问题型：函数涉及具体问题时，要考虑使具体问题有意义。主要有以下两种情况：①几何问题型：要使自变量取正值，且满足几何的定义、公理、定理等；②实际问题型：自变量的取值使实际问题有意义。

(3) 动态问题型：在动态问题中，自变量的取值范围受动点运动范围的限制。一般先求动点运动的极端值，从而确定自变量的取值范围。

自变量的取值范围可以是无限的，也可以是有限的，甚至可以是几个数或单独的一个数。

2. 2 一次函数

2. 2. 1 考查要点：一次函数的概念、图象、性质；一次函数解析式的确定。

2. 2. 2 考纲要求：理解正比例、一次函数的概念并会用待定系数法求出函数解析式；熟练掌握一次函数的图象及其性质，并能灵活运用。

2. 2. 3 主要题型：填空题，选择题，解答题。

2. 2. 4 知识要点：

(1) 一般地，如果 $y=kx+b$ (k, b 是常数， $k \neq 0$)，那么， y 叫做 x 的一次函数。 k, b 是常数的含义是，对于一个特定的函数式， k 和 b 的值是固定的。 $k \neq 0$ 这个条件不能省略不写，若 $k=0$ ，则 $y=kx+b$ 变形为 $y=b$ ， b 是关于 x 的 0 次式，因此不是一次函数。

特别地，当 $b=0$ 时，一次函数 $y=kx+b$ 就成为 $y=kx$ (k 是常数， $k \neq 0$)，这时 y 叫做 x 的正比例函数。正比例函数是一次函数的特例。

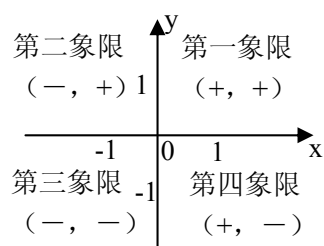
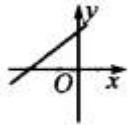
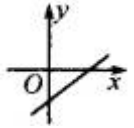
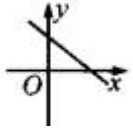
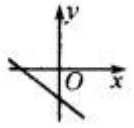


图 1

(2)一次函数的图象是一条直线。由几何知识可得，要画一条直线只要知道两点就可以了。所以一次函数图象的方法是：只要先描出两点，再连成直线就可以了。画正比例函数 $y=kx$ 的图象，通常取 $(0, 0)$ 和 $(1, k)$ 两点连成直线。画一次函数 $y=kx+b$ (k, b 是常数， $k \neq 0$) 的图象，通常选取 $(0, b)$ 和 $(-\frac{k}{b}, 0)$ 两点连成直线。通常，我们把一次函数 $y=kx+b$ 的图象叫做直线 $y=kx+b$ 。

直线的倾斜形态与 k 的关系如下：(1) $k>0$ 时，直线的倾斜形态 “/”；(2) $k<0$ 时，直线的倾斜形态 “\”。要树立“数形结合”的数学思想方法。由 k 的数值（正、负）决定出直线的倾斜形态，反之，由直线的倾斜形态能确定 k 的正、负。 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 与 $y=kx$ ($k \neq 0$) 的图象是两直平行线。

直线所经过的象限与 k, b 的关系：

示意图				
k、b 的符号	$k>0$		$k<0$	
	$b>0$	$b<0$	$b>0$	$b<0$
直线 $y=kx+b$ 所经过的象限	一、二、三	一、三、四	一、二、四	二、三、四
直线 $y=kx+b$ 不经过的象限	四	三	二	一

(3) 一次函数的性质：

一般地，正比例函数 $y=kx$ 和一次函数 $y=kx+b$ 都有下列性质：(1) 当 $k>0$ 时， y 随 x 的增大而增大；(2) 当 $k<0$ 时， y 随 x 的增大而减小。

(4) 一次函数解析式的确定：

在正比例函数 $y=kx$ ($k \neq 0$) 中，只要求出 k 的数值，这个正比例函数解析式就求得。所以求 $y=kx$ ($k \neq 0$) 所需条件是一个点坐标。

由于一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 中需要求出 k 与 b 的数值，所以需要两个点的坐标（或说两个相互独立的条件），代入解析式中，得到关于 k 与 b 的二元一次方程组，通过解方程组求出 k 与 b 的数值。

要注意掌握由坐标求线段长度，由线段长度求坐标的转换方法。掌握由直线解析式求与坐标轴交点的坐标和由直线上两点坐标，求直线解析式的方法。掌握求两直线交点坐标的方法。

2. 3 反比例函数

2. 3. 1 考查要点：反比例函数的概念、图象、性质；反比例函数解析式的确定。

2. 3. 2 考纲要求：理解反比例函数的概念并会用待定系数法求出函数解析式；熟练掌握反比例函数的图象及其性质，并能灵活运用。

2. 3. 3 主要题型：填空题，选择题，解答题，应用题。

2. 3. 4 知识要点：

(1) 如果 $y = \frac{k}{x}$ (或 $y = kx^{-1}$ 或 $xy = k$) ($k \neq 0$)，那么 y 叫做 x 的反比例函数。注意反比例函数有三种不同表现形式：① $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)；② $y = kx^{-1}$ ($k \neq 0$)；③ $xy = k$ ($k \neq 0$)。自变量 x 的取值范围是 $x \neq 0$ 的实数。在反比例函数中，两个变量成反比例关系。因此，判定两个变量是否成反比例关系，看是否能写成反比例函数关系，即两个变量的积是不是一个不为 0 的常数。

(2) 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (或 $y = kx^{-1}$ 或 $xy = k$) ($k \neq 0$) 的图象是由两条曲线组成，叫做双曲线，它们关于原点成中心对称。反比例函数的图象是两条双曲线，两条双曲线既不过原点，又与两个坐标轴不相交（因为 $xy \neq 0$ ），它只是无限接近 x 轴和 y 轴。用描点法画反比例函数图象时，可先画一个分支，由两个分支关于原点对称的性质，再画另一个分支。要注意两个分支不能相连，即两个分支是断开的。

(3) 反比例函数解析式的确定。因为反比例函数解析式 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)，只含有一个待定系数，所以要确定函数解析式，只需要已知图象所经过的一个点的坐标即可。

(4) 反比例函数性质的学习要结合图象进行。 $k > 0$ 时，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (或 $y = kx^{-1}$) 的图象在一、三象限，函数 y 在每个象限内随 x 的增大而减小。 $k < 0$ 时，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (或 $y = kx^{-1}$) 的图象在二、四象限，函数 y 在每个象限内随 x 的增大而增大。

(5) 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (或 $y = kx^{-1}$) ($k \neq 0$) 中比例系数 k 的几何意义是：

过双曲线上任一点 $P(x, y)$ 作 x 轴、 y 轴的垂线 PM 、 PN ，所得的矩形 $PMON$ 的面积 $S = PM \cdot PN = |x| \cdot |y| = |xy| = |k|$ 。如果再连结 PO ，则

$S_{\triangle POM} = S_{\triangle PON} = \frac{1}{2}|k|$ 。如图 2。

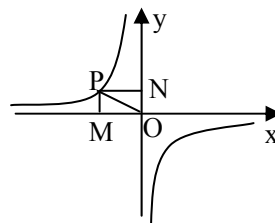


图 2

(6) 一次函数与二元一次方程（组）的关系：

将一次函数 $y = kx + b$ 移项，得 $kx - y + b = 0$ ，可以看出这是一个二元一次方程。这样， $y = kx + b$ 的图象也是方程 $kx - y + b = 0$ 的图象，图象上每个点的坐标都适合方程 $kx - y + b = 0$ ，也就是方程 $kx - y + b = 0$ 的解。直线 $y = kx + b$ 与 x 轴的交点的纵坐标等于 0，即直线 $y = kx + b$ 与 x 轴的交点的

横坐标就是一元一次方程 $kx+b=0$ 的解。

设直线 $y = k_1x + b_1$ 和直线 $y = k_2x + b_2$ 的交点坐标为 (a, b) ，则 a, b 适合这两个函数关系式。所以直线 $y = k_1x + b_1$ 和直线 $y = k_2x + b_2$ 的交点坐标就是方程组
$$\begin{cases} k_1x - y + b_1 = 0 \\ k_2x - y + b_2 = 0 \end{cases}$$
 的解。

因此，我们可以用图象法来求一元一次方程、二元一次方程组以及一元一次不等式的近似解。

2. 4 二次函数

2. 4. 1 考查要点：描点法画函数图象；二次函数和抛物线的有关的概念、性质；二次函数解析式的确定。

2. 4. 2 考纲要求：了解描点法画函数图象，理解二次函数和抛物线的有关的概念，抛物线的顶点、对称轴；会用待定系数法求出函数解析式；熟练掌握二次函数的图象及其性质，并能灵活运用。

2. 4. 3 主要题型：填空题，选择题，解答题，阅读理解题，应用题。

2. 4. 4 知识要点：

(1) 二次函数解析式，主要有两种形式：一般式 $y=ax^2+bx+c$ 与顶点式 $y=a(x-h)^2+k$ ，其中 $a \neq 0$ 。它的图象为抛物线，其位置与各系数关系为：(1) a 决定抛物线的开口方向： $a>0$ ，开口向上； $a<0$ ，开口向下；(2) 抛物线与 y 轴交点的坐标为 $(0, c)$ ；(3) a, b 结合决定抛物线对称轴的位置，对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$ ，若 a, b 同号，则对称轴在 y 轴左侧；若 $b=0$ ，则对称轴是 y 轴；若 a, b 异号，则对称轴在 y 轴右侧；(4) 一般式的顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ，顶点式的顶点坐标为 (h, k) 。

(2) 求二次函数的解析式一般用待定系数法，但要根据不同条件，设出恰当的解析式：若给出抛物线上任意三点，通常可设一般式；若给出抛物线的顶点坐标或对称轴或最值，通常可设顶点式。

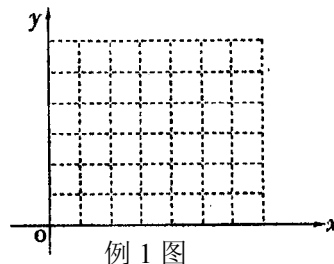
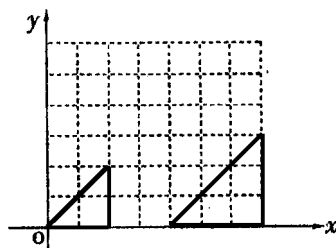
3. 中考函数新颖试题分析

中考数学试题里，有关函数的试题覆盖了函数的主要考点，且出现了一些体现新课程理念，具有强烈的时代气息的新颖试题，下面结合一些事例作简单分析。

3. 1. 坐标系与相似三角形

例 1 请同学们在右边的同一个直角坐标系中，画出两个形状相同，但面积不等的三角形。

答案不唯一。如



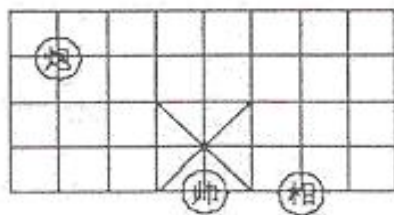
评注：此给学生广阔的思维空间，体现数形结合思想，学生可从边或角两个角度探求直角，画出符合要求的直角三角形。本题考查学生发散思维的能力、运用知识解决问题的能力及数形结合思想。

3. 2. 网格与坐标系

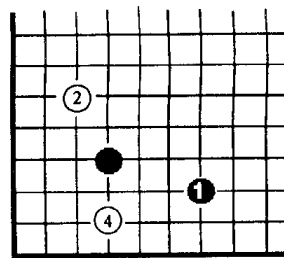
例 2 如图，是象棋盘的一部分，若帅位于点 $(1, -2)$ 上，相位于点 $(3, -2)$ 上，则炮位于点 (\quad) 上。

- A. $(-1, 1)$ B. $(-1, 2)$ C. $(-2, 1)$ D. $(-2, 2)$

例 3 (2005 年杭州市) 如图的围棋盘放在某个平面直角坐标系内，白棋② 的坐标为 $(-7, -4)$ ，白棋④ 的坐标为 $(-6, -8)$ ，那么黑棋① 的坐标应该是_____。



例 2 图



例 3 图

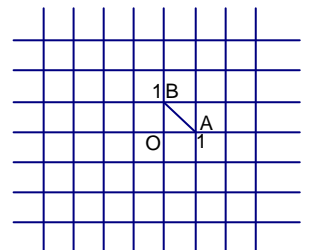
答案：C； $(-3, -7)$

评注：这两个题充分利用方格纸的特点及坐标的有关知识，将方格纸与平面直角坐标系以及学生熟悉的象棋、围棋联系在一起，新颖而有趣味性。

3. 3. 网格与坐标系与中心对称

例 4 如果将点 P 绕定点 M 旋转 180° 后与点 Q 重合，那么称点 P 与点 Q 关于点 M 对称，定点 M 叫做对称中心。此时， M 是线段 PQ 的中点。如图，在直角坐标系中， $\triangle ABO$ 的顶点 A 、 B 、 O 的坐标分别为 $(1, 0)$ 、 $(0, 1)$ 、 $(0, 0)$ 。点列 P_1 、 P_2 、 P_3 、 \dots 中的相邻两点都关于 $\triangle ABO$ 的一个顶点对称：

点 P_1 与点 P_2 关于点 A 对称，点 P_2 与点 P_3 关于点 B 对称，点 P_3 与 P_4 关于点 O 对称，点 P_4 与点 P_5 关于点 A 对称，点 P_5 与点 P_6 关于点 B 对称，点 P_6 与点 P_7 关于点 O 对称， \dots 。对称中心分别是 A 、 B 、 O 、 A 、 B 、 O 、 \dots ，且这些对称中心依次循环。已知点 P_1 的坐标是 $(1, 1)$ ，试求出点 P_2 、 P_7 、 P_{100} 的坐标。



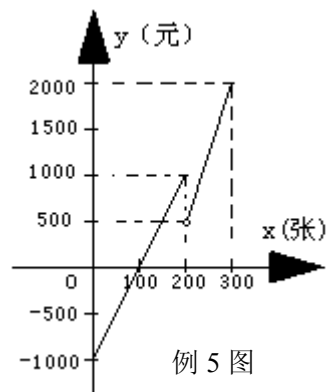
例 4 图

答案： $P_2(1, -1)$ $P_7(1, 1)$ $P_{100}(1, -3)$

评注：本题将中心对称、坐标以及规律寻找结合起来。

3. 4. 阅读函数图象，解决实际问题。

例 5 某游乐场每天的赢利额 y (元) 与售出的门票 x (张) 之间的函数关系如图所示。



- (1) 当 $0 \leq x \leq 200$, 且 x 为整数时, y 关于 x 的函数解析式为_____;
- 当 $200 < x \leq 300$, 且 x 为整数时, y 关于 x 的函数解析式为_____.
- (2) 要使游乐场一天的赢利超过 1000 元, 试问该天至少应售出多少张门票?
- (3) 请思考并解释图像与 y 轴交点 $(0, -1000)$ 的实际意义.
- (4) 根据图像, 请你再提供 2 条信息.

答案: (1) $y=100x-1000$; (2) $y=150x-2500$. (3) 没有售出门票时, 亏损 1000 元. (4) 答案不惟一.

评注：此题巧妙地将函数知识与实际生活情景联系在一起。

3. 5. 二次函数的最值与应用。

由 $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ 可知: 当 $a > 0$ 时, 顶点 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$

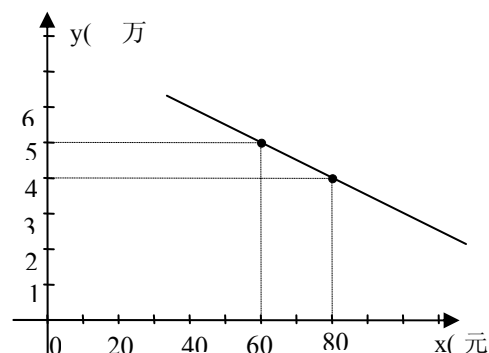
是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的最低点, 即 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 取得最小

值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$ 。当 $a < 0$ 时, 顶点 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ 是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的最高点, 即

$x = -\frac{b}{2a}$ 时, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 取得最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$ 。

例 6 某通讯器材公司销售一种市场需求较大的新型通讯产品。已知每件产品的进价为 40 元, 每年销售该种产品的总开支 (不含进价) 总计 120 万元。在销售过程中发现, 年销售量 y (万件) 与销售单价 x (元) 之间存在着如图所示的一次函数关系。

- (1) 求 y 关于 x 的函数关系式;
- (2) 试写出该公司销售该种产品的年获利 z (万元) 关于销售单价 x (元) 的函数关系式 (年获利 = 年销售额 - 年销售产品总进价 - 年总开支)。当销售单价 x 为何值时, 年获利最大? 并求这个最大值;



- (3) 若公司希望该种产品一年的销售获利不低于 40 万元, 借助(2)中函数的图象, 请你帮助该公司确定销售单价的范围。在此情况下, 要使产品销售量最大, 你认为销售单价应定为多少元?

答案: (1) $y = -\frac{1}{20}x + 8$

(2) 当 $x = 100$ 元时, 年获利最大为 60 万元。

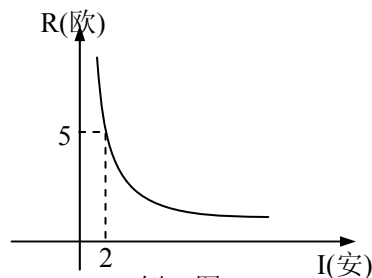
(3) 要使销售量最大, 又要使年获利不低于 40 万元, 销售单价应定为 80 元。

评注: 本题在日常情景中, 运用了许多数学知识, 如解方程组, 二次函数的画图及求二次函数的极值。应用二次函数的有关知识, 分析和解决生产、生活或相关学科中简单问题, 既可提高学习数学的兴趣, 又能增强用数学的意识, 也是当前体现“人人学有用数学”的热点考题。需要注意的是, 实际问题中, 有时需要根据实际问题的具体情况确定“局部最值”。

3. 6. 函数与跨学科试题

例 7 在某一电路中, 保持电压不变, 电流 I (安) 与电阻 R (欧) 成反比例函数关系, 其图像如图 3, 则这一电路的电压为_____伏。

析解: 因为在某一电路中, 保持电压不变, 电流 I (安) 与电阻 R (欧) 成反比例函数关系。所以可设 $I = \frac{U}{R}$ 。又根据图象过 $(2, 5)$ 。所以容易求得 $U = IR = 10$ (伏)。

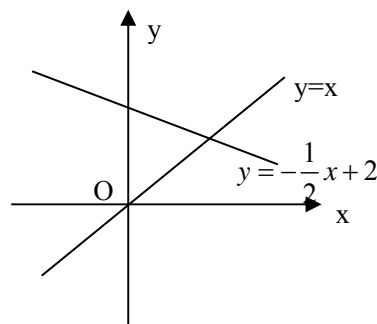


例 7 图

评注: 动态的数量变化预示着函数的广泛运用。实际生活中的许多问题都可以用函数的有关知识来解决。尽管我们初中生的数学知识十分有限, 但也能解决不少的实际问题。在我们学习的物理知识中, 许多物理量之间的关系就是我们数学上的反比例函数关系。在倡导素质教育的今天, 在数学试题中渗透物理知识是一个新热点。在近几年的中考数学试题中, 已开始出现数学与物理综合的考题, 学科结合型试题也是今后中考命题的一个趋势, 值得引起大家的注意。

3. 7. 函数探索性试题

例 8 如图, P 是 y 轴上一动点, 是否存在平行于 y 轴的直线 $x = t$, 使它与直线 $y = x$ 和直线 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 分别交于点 D 、 E (E 在 D 的上方), 且 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形。若存在, 求 t 的值及点 P 的坐标; 若不存在, 请说明原因。



例 8 图

分析: 对存在性探索试题, 其一般解题思路是: 先对作出肯定的假设, 然后由肯定假设出发, 结合已知条件进行正确的推理或计算, 再对得出的结果进行分析检验, 说明假设是否正确, 由此得出符合条件的数学对象存在或不存在。顺着这种思路, 对该题, 我们很容易得到以下两种解法。

答案: 存在。当 $t = \frac{4}{5}$ 时, $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形, 此时 P 点坐标为 $(0, \frac{8}{5})$ 或 $(0,$

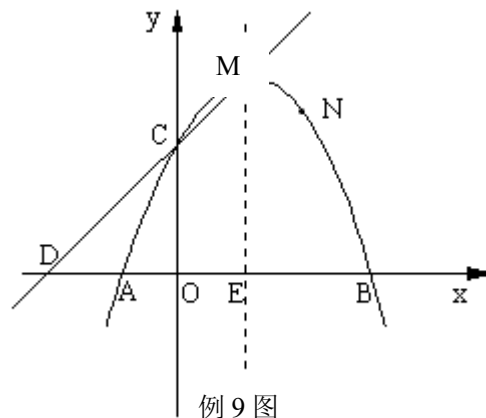
$\frac{4}{5})$; 当 $t = \frac{4}{7}$ 时, $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形, 此时 P 点坐标为 $(0, \frac{8}{7})$; 当 $t = -4$ 时, $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形, 此时 P 点坐标为 $(0, 0)$ 。

评注: 所谓探索型试题, 是指缺少一定的题设和结论, 需要学生自己推断、补充并加以

解决的一类数学考题。由于这类考题形式新颖、思考方向不确定，因此，综合性和逻辑性较强，它着力于考查学生的观察、分析、比较、归纳、推理等方面的能力，对提高学生的思维品质，培养学生独立解决问题的能力具有十分重要的作用，因此成为近年来各地中考命题的一类热门题型。其具体形式多样，其中，存在性探索题是最常见的一类。

3. 8. 函数综合题

例 9 如图，已知抛物线的顶点坐标为 $M(1, 4)$ ，且经过点 $N(2, 3)$ ，与 x 轴交于 A 、 B 两点(点 A 在点 B 左侧)，与 y 轴交于点 C 。(1) 求抛物线的解析式及点 A 、 B 、 C 的坐标；(2) 若直线 $y=kx+t$ 经过 C 、 M 两点，且与 x 轴交于点 D ，试证明四边形 $CDAN$ 是平行四边形；(3) 点 P 在抛物线的对称轴 $x=1$ 上运动，请探索：在 x 轴上方是否存在这样的 P 点，使以 P 为圆心的圆经过 A 、 B 两点，并且与直线 CD 相切，若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。



解：(1) $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ； $C(0, 3)$ 。

(2) 略。

(3) 满足题意的点 P 存在，其坐标为 $(1, -4+2\sqrt{6})$ 。

评注：这是最典型的中考数学压轴题。

几何中的基本元素——线段做为函数中的变量，求函数解析式，一般寻找一个等量关系列方程，再转化为函数解析式，难点是求自变量取值范围及画函数图象的示意图。函数知识与几何知识相互转化的基础是 | 点坐标 | = 线段长。

一般解题思路是：(1) 已知点坐标 \Rightarrow 线段长，线段长 $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ 点坐标；(2) 用待定系数法求函数解析式；(3) 解析式 \Rightarrow 点坐标 \Rightarrow 线段长 \Rightarrow 面积及其它。

解综合题中注意合理运用点在函数图象上，点的坐标适合函数解析式：(1) 已知点 $P(a, b)$ (a, b 为已知数) 代入含“待定系数”的函数解析式构造关于待定系数的方程。(2) 点 $P(a, k)$ 或 (k, b) (其中 a, b 为已知数， k 为待定系数) 代入含“待定系数 k ”的函数解析式，构造关于 k 的方程。(3) 已知点 $P(a, y)$ 或 (x, b) (其中 a, b 为已知数， x, y 为未知数)，代入已知函数解析式，则可以用关于 a 的代数式表示 y 或用关于 b 的代数式表示 x 。(4) 已知点 $P(x, b)$ (其中 b 为已知数， x 为未知数)，代入含待定系数 k 的函数解析式，可以用含 k 的代数式表示 x 。

解函数——几何综合题时，注意图形的分解。(把基本的几何图形从直角坐标系中分离出来，求出所需线段长后，再放回坐标系中)。

解函数——几何综合题时，注意对点位置的讨论。

综合题的学习既要见题有一定的思路，又不能模式化地套用旧有模式，应以数学思想方法为指导，致力于能力的提高。

