

3.转化的思想

转化思想是解决数学问题的一种最基本的数学思想，在研究数学问题时，我们通常是将未知的问题转化为已知的问题，将复杂的问题转化为简单的问题，将抽象的问题转化为具体的问题，将实际问题转化为数学问题等，我们也常常在不同的数学问题之间互相转化，可以说在解决数学问题时转化思想几乎是无处不在的。

一：【要点梳理】

将未知解法或难以解决的问题，通过观察、分析、类比、联想等思想的过程，选择运用的数学方法进行交换，化归为在已知知识范围内已经解决或容易解决的问题思想叫做转化与化归的思想，转化与化归思想的实质是揭示联系，实现转化。

除简单的数学问题外，每个数学问题的解决都是通过转化为已知的问题实现的，化归月转化思想是解决数学问题的根本思想，解题的过程实际上就是一步步转化的过程，数学中的转化比比皆是，如未知向已知转化，复杂问题向简单问题转化，空间向平面的转化，高维向低维转化，多元向一元转化，高次向低次转化，函数与方程的转化，无限向有限的转化等，都是转化思想的体现。

熟练，扎实的掌握基础知识、基本技能和基本方法是转化的基础；丰富的联想，机敏细微的观察、比较、类比是实现转化的桥梁；培养训练自己自觉的化归与转化意识需要对定理、公式、法则有本质上的深刻理解和对典型习题的总结和提炼，要积极主动有意识的去发现事物之间的本质联系。“抓基础，重转化”是学好中学数学的金钥匙。

二：【例题与练习】

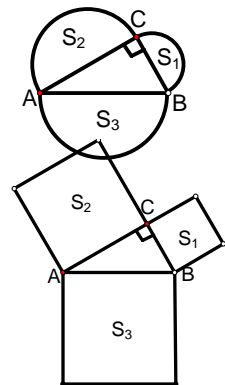
1. 已知实数 x 满足 $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$, 那么 $x + \frac{1}{x}$ 的值是 ()

A. 1 或 -2; B. -1 或 2; C. 1; D. -2

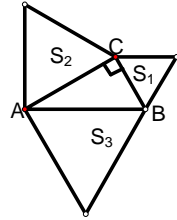
2. 如图①，分别以直角三角形 ABC 三边为直径向外作三个半圆，其面积分别用 S_1, S_2, S_3 表示，则不难证明 $S_1=S_2=S_3$

- (1)如图②，分别以直角三角形 ABC 三边为边向外作三个正方形，其面积分别用 S_1, S_2, S_3 表示，那么 S_1, S_2, S_3 之间有什么关系（不求证明）？

- (2)如图③，分别以直角三角形 ABC 三边为边向外作三个正三角形，



其面积分别为 S_1 , S_2 , S_3 表示, 请你确定 S_1 , S_2 , S_3 之间的关系, 并加以证明。



(3)若分别以直角三角形 ABC 三边为边向外作三个一般三角形,

其面积分别用 S_1 , S_2 , S_3 表示, 为使 S_1 , S_2 , S_3 之间仍具

有与 (2) 相同的结论, 所作三角形应满足什么条件? 证明你的结论;

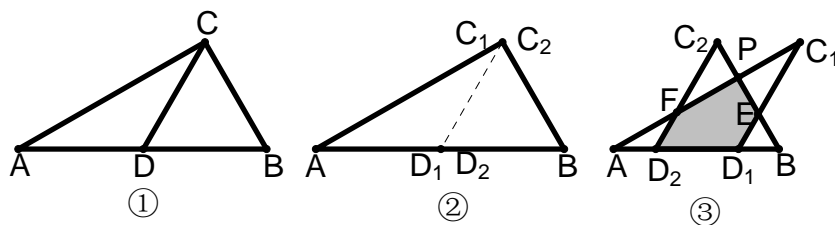
(4)类比 (1) (2) (3) 的结论, 请你总结出一个更具一般意义的结论。

3. 如图①所示, 一张三角形纸片 ABC , 角 $ACB=90^\circ$, $AC=8$, $BC=6$, 沿斜边 AB 的中线 CD 把这张纸片剪成三角形 AC_1D_1 和三角形 BC_2D_2 两个三角形 (如图②所示), 将纸片三角形 AC_1D_1 沿直线 D_2B (AB 方向) 平移 x (点 A , D_1 , D_2 , B 始终在同一直线上), 当点 D_1 与点 B 重合时, 停止平移, 在平移过程中, CD_1 与 BC_2 交于点 E , AC_1 与 C_2D_2 , BC_2 分别交于点 F , P

(1)当三角形 AC_1D_1 平移到如图③所示的位置时, 猜想图中的 D_1E 与 D_2F 的数量关系, 并加以证明你的猜想

(2)设平移距离 D_2D_1 为 x , 三角形 AC_1D_1 与三角形 BC_2D_2 重叠部分面积设为 y , 请你写出 y 与 x 的函数关系式, 以及自变量的取值范围;

(3)对与 (2) 中的结论, 是否存在这样的 x 的值, 使重叠部分的面积等于原三角形 ABC 的 $1/4$? 若存在, 求 x 的值; 若不存在, 请说明理由。

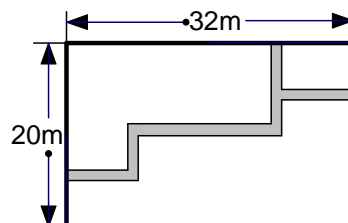


4. 如图, 在宽为 20m , 长 32m 的矩形地面上修筑同样宽的道路 (如图阴影部分), 余下的部分种上草, 要使草坪的面积为 540m^2 . 求道路的宽 17 如图反比例函数 $y = -\frac{8}{x}$ 与一次

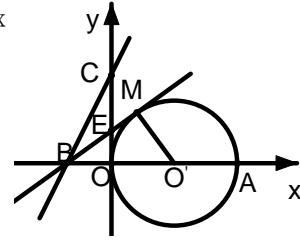
函数 $y = -x + 2$ 的图像交于 A , B 两点

(1)求 A , B 两点坐标

(2)求三角形 AOB 的面积



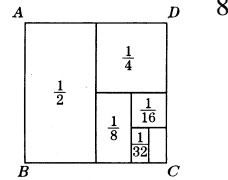
5. 如图，在直角坐标系中，点 O' 的坐标为 $(2, 0)$ ，圆 O 与 x 轴交于原点 O 和点 A ，又 B, C, E 三点坐标分别为 $(-1, 0)$ ， $(0, 3)$ ， $(0, b)$ ，且 $0 < b < 3$



- (1) 求点 A 的坐标和经过点 B, C 两点的直线的解析式
(2) 当点 E 在线段 OC 上移动时，直线 BE 与圆 O 有哪几种位置关系？并求出这种位置关系 b 的取值范围。

6. 已知 $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 25 = 0$ ，求代数式 $\frac{x^2 - 4y}{x^2 + 4xy + 4y^2} - \frac{x}{x + 2y}$ 的值。

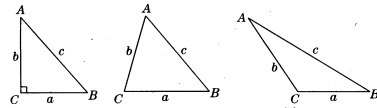
7. 如图，把一个面积为 1 的正方形等分成两个面积为 $\frac{1}{2}$ 的矩形，接着把面积为 $\frac{1}{2}$ 的矩形等分成两个面积为 $\frac{1}{4}$ 的正方形，再把面积为 $\frac{1}{4}$ 的正方形等分成两个面积为 $\frac{1}{8}$ 的矩形，如此进行下去……试利用图形揭示的规律计算：



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = \underline{\hspace{2cm}}$$

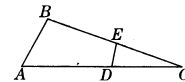
8. 解方程： $2(x-1)^2 - 5(x-1) + 2 = 0$

9. $\triangle ABC$ 中， $BC = a$ ， $AC = b$ ， $AB = c$ 。若 $\angle C = 90^\circ$ ，



如图 1，根据勾股定理，则 $a^2 + b^2 = c^2$ 。若 $\triangle ABC$ 不是直角三角形，如图 2 和图 3，请你类比勾股定理，试猜想 $a^2 + b^2$ 与 c^2 的关系，并证明你的结论。

10. 已知：如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， E 是 BC 的中点， D 在 AC 边上，
若 $AC=1$ 且 $\angle BAC=60^\circ$ ， $\angle ABC=100^\circ$ ， $\angle DEC=80^\circ$ ，



求： $S_{\triangle ABC} + 2S_{\triangle CDE}$ 。