

1. 分类讨论思想

当数学问题不宜统一方法处理时，我们常常根据研究对象性质的差异，按照一定的分类方法或标准，将问题分为全而不重，广而不漏的若干类，然后逐类分别讨论，再把结论汇总，得出问题的答案的思想。这就是主要考查了分类讨论的数学思想方法。

一：【要点梳理】

1. 数学问题比较复杂时，有时可以将其分割成若干个小问题或一系列步骤，从而通过问题的局部突破来实现整体解决，正确应用分类思想，是完整接替的基础。而在学业考试中，分类讨论思想也贯穿其中，命题者经常利用分类讨论题来加大试卷的区分度，很多压轴题也都设计分类讨论。由此可见分类思想的重要性，在数学中，我们常常需要根据研究对象性质的差异，分个中不同情况予以观察，这种分类思考的方法是一种重要的数学思想方法的解题策略，掌握分类的方法，领会其实质，对于加深基础知识的理解，提高分级问题、解决问题的能力都是十分重要的。

2. 分类讨论设计全部初中数学的知识点，其关键是要弄清楚引起分类的原因，明确分类讨论的对象和标准，应该按可能出现的情况做出既不重复，又不遗漏，分门别类加以讨论求解，再将不同结论综合归纳，得出正确答案。

3. 热点内容

(1). 实数的分类。

(2). 绝对值、算术根 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a (a \geq 0) \\ -a (a < 0) \end{cases}$

(3). 各类函数的自变量取值范围

(4). 函数的增减性： $y = kx + b \begin{cases} k > 0 \text{ 时, } y \text{ 随 } x \text{ 的增大而增大} \\ k < 0 \text{ 时, } y \text{ 随 } x \text{ 的增大而减小} \end{cases}$

$y = \frac{k}{x} \begin{cases} k > 0 \text{ 时, } y \text{ 随 } x \text{ 的增大而减小} \\ k < 0 \text{ 时, } y \text{ 随 } x \text{ 的增大而增大} \end{cases}$ $y = ax^2 + bx + c \begin{cases} a > 0 \text{ 时, 抛物线开口向上} \\ a < 0 \text{ 时, 抛物线开口向下} \end{cases}$

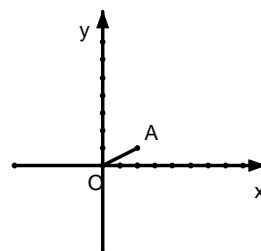
(5). 点与直线的位置关系、直线与圆的位置关系、圆与直线的位置关系。

(6). 三角形的分类、四边形的分类

二：【例题与练习】

1. 在平面直角坐标系内，已知点 A (2, 1)，O 为坐标原点。

请在坐标上确定点 P，使得三角形 AOP 成为等腰三角形，



在给出坐标系中把所有这样的点 P 都找出来，画上实心点，

并在旁边标上 P1, P2, P3……

(有 k 个就表到 P1, P2, Pk, 不必写出画法 0) .

2. 由于使用农药的原因，蔬菜都回残留一部分农药，对身体健康不利，用水清洗一堆青菜上残留的农药，对于水清洗一次的效果如下规定：用一桶水可洗掉青菜上残留农药的 $\frac{1}{2}$ ，

用水越多洗掉的农药越多，但总还有农药残留在青菜上，设用 x 桶水清洗青菜后，青菜上残留的农药量比本次清洗的残留的农药比为 y，

(1) 试解释 $x=0$, $y=1$ 的实际意义

(2) 设当 x 取 x_1, x_2 使对应的 y 值分别为 y_1, y_2 , 如果 $x_1 > x_2 > 1$, 试比较 $y_1, y_2, \frac{1}{2}$ 的关系
(直接写结论)

(3) 设 $y = \frac{1}{1+x^2}$, 现有 $a(a>0)$ 桶水，可以清洗一次。也可以把水平均分 2 份后清洗两次，试问哪种方；案上残留的农药比较少？说明理由.

3. 田忌赛马是一个为人熟知的故事，传说战国时期，齐王与田忌个有等级为上、中、下的三匹马，同等级的马中，齐王的马比田忌的马强，有一天，齐王要与田忌赛马，双方约定：比赛三局，每局各出一匹马，每匹马赛一次，赢得两局者为胜，看样子田忌似乎没有什么胜的希望，但是田忌的谋士了解到主人的上、中等马分别比齐王的中、下等马要强……

(1) 如果齐王将马按上、中、下的顺序出阵比赛，那么田忌的马如何出阵，田忌才能取胜？

(2) 如果齐王将马按上、中、下的顺序出阵，而田忌的马随即出阵比赛，田忌获胜的概率是多少？（要求写双方对阵的所有情况）

4. 填空：

(1) 要把一张值为 10 元的人民币换成零钱，现有足够的面值 2 元、1 元的人民币，那么有_____种换法。

(2) 已知 $(2005-x)^2=1$, 则 $x=$ _____

(3) 若 $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = k$, 则直线 $y=kx+k$ 的图像必经过第_____象限。

(4) 一次函数 $y=kx+b$ 的自变量取值范围是 -3 小于等于 x 小于等于 6, 相应函数值的取值

范围是-5 小于等于 y 小于等于 2。则这个一次函数的解析式为_____

5. 选择:

(1) 若 $x^2+4(m-2)x+16$ 是完全平方式, 则 m 等于 ()

A. 6 B. 4 C. 0 D. 4 或 0

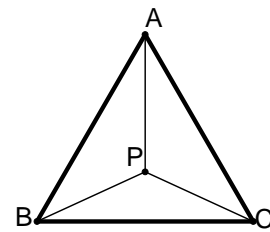
(2) 若圆 O 所在平面内的一点 P 到圆 O 上的点的最大距离为 a, 最小距离为 b ($a>b$), 则此圆的半径为 ()

A. $\frac{a+b}{2}$; B. $\frac{a-b}{2}$; C. $\frac{a+b}{2}$ 或 $\frac{a-b}{2}$; D. $a+b$ 或 $a-b$

(3) 已知圆 O 的直径 AB=10cm。CD 为圆 O 的弦, 且点 C, D 到 AB 的距离分别为 3cm 和 4cm, 则满足上述条件的 CD 共有 ()

A. 8 条 B. 12 条 C. 16 条 D. 以上都不对

6. 如图, 已知等边三角形 ABC 所在平面上有点 P, 使 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PAC$ 都是等腰三角形, 问具有这样性质的点 P 有多少个? 请你画画



7. 一个不透明的袋子中装有三个完全相同的小球, 分别标出 3, 4, 5 从袋子中随即取出一个小球, 用小球上的数字作为十位上的数字, 然后放回; 在取出一个小球用一个小球上的数字作为数位上的数字, 这样组成一个两位数, 试问: 按这样方法能组成哪些两位数? 十位数上的数字比个为上的数字合为 9 的概率是多少? 用列表发或画数状图加以说明。

8. 依法纳税是每个公民应尽的义务, 从 2006 年 1 月 1 日起, 个所得税的起征点从 800 元提到 1600 元。

月工资个人所得税税率表(与修改前一样):

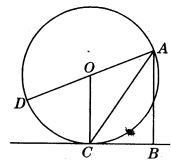
(1) 某同学父亲 2006 年 10 月工资是 3000 元 (未纳税), 问他要纳税多少?

(2) 某人 2006 年 8 月纳税 150.1 元, 那么此人本月的工资 (未纳税) 是多少元? 此所得税法修改前少纳税多少元?

(3) 已知某人 2006 年 9 月缴纳个人所得税 a ($0<a<200$) 元, 求此人本月工资 (未纳税) 是多少元?

全月应纳税所得额	税率 (%)
不超过 500 元的部分	5
超过 500 元至 2000 元的部分	10
超过 2000 元至 5000 元的部分	15
.....

9. 已知：如图所示，直线 l 切 $\odot O$ 于点 C ， AD 为 $\odot O$ 的任意一条直径，点 B 在直线 l 上，且 $\angle BAC = \angle CAD$ (AD 与 AB 不在一条直线上)，试判断四边形 $ABCO$ 为怎样的特殊四边形？



10. (1) 抛物线 $y = 2x^2 + bx - 2$ 经过点 $A(1, 0)$.

① 求 b 的值；

② 设 P 为此抛物线的顶点， $B(a, 0)$ ($a \neq 1$) 为抛物线上的一点， Q 是坐标平面内的点。如果以 A 、 B 、 P 、 Q 为顶点的四边形为平行四边形，试求线段 PQ 的长。

(2) 已知矩形的长大于宽的 2 倍，周长为 12，从它的一个顶点，作一条射线，将矩形分成一个三角形和一个梯形，且这条射线与矩形一边所成的角的正切值等于 $\frac{1}{2}$ ，设梯形的面积为 S ，梯形中较短的底为 x ，试写出梯形面积 S 关于 x 的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围。